Пояснювальна записка

Збірник призначений для проведення підсумкової державної атестації з математики в дев'ятих класах загальноосвітніх навчальних закладів.

Зміст завдань відповідає діючій програмі для загальноосвітніх навчальних закладів *та програмі для шкіл, ліцеїв і гімназій з поглибленим* вивченням математики.

Посібник «Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 9 клас» містить 80 варіантів атестаційних робіт.

Кожен варіант атестаційної роботи складається з чотирьох частин, які відрізняються за складністю та формою тестових завдань.

У ***першій частині*** атестаційної роботи пропонується 12 завдань з вибором однієї правильної відповіді (8 завдань з алгебри і 4 завдання з геометрії). Для кожного тестового завдання з вибором відповіді подано чотири варіанти відповіді, з яких тільки один правильний. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей указана тільки одна літера, якою позначена правильна відповідь (зразок бланка і правила його заповнення наведено в кінці книги). При цьому учень не повинен наводити будь-які міркування, що пояснюють його вибір.

Правильне розв'язання кожного завдання цього блоку №№ 1.1–1.12 оцінюється **одним балом**.

Друга частина атестаційної роботи складається із 6 завдань (4 завдання з алгебри і 2 завдання з геометрії) відкритої форми з короткою відповіддю. Таке завдання вважається виконаним правильно, якщо в бланку відповідей записана правильна відповідь (наприклад, число, вираз, корені рівняння тощо). Усі необхідні обчислення, перетворення тощо учні виконують на чернетках.

Правильне розв'язання кожного із завдань №№ 2.1–2.6 цього блоку оцінюється **двома балами**.

Третя частина атестаційної роботи складається з 4 завдань (3 завдання з алгебри і 1 завдання з геометрії), четверта частина — з 3 завдань (2 завдання з алгебри і 1 завдання з геометрії) відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Завдання третьої та четвертої частин вважаються виконаними правильно, якщо учень навів розгорнутий запис розв'язування завдання з обґрунтуванням кожного етапу та дав правильну відповідь. Правильність виконання завдань третьої та четвертої частин оцінює вчитель відповідно до критеріїв і схеми оцінювання завдань. Правильне розв'язання кожного із завдань №№ 3.1–3.4 третьої частини і кожного із завдань №№ 4.1–4.3 четвертої частини оцінюється **чотирма балами**.

Завдання четвертої частини виконують тільки учні класів з поглибленим вивченням математики.

Завдання третьої та четвертої частин атестаційної роботи учні виконують на аркушах зі штампом відповідного загальноосвітнього навчального закладу.

Учні загальноосвітніх класів виконують завдання першої, другої та третьої частин, учні класів з поглибленим вивченням математики виконують завдання першої, другої, третьої та четвертої частин.

Сума балів, нарахованих за правильно виконані учнем завдання, переводиться в оцінку за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів за спеціальною шкалою.

Систему нарахування балів за правильно виконане завдання для оцінювання робіт *учнів загальноосвітніх класів* наведено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1.1 – 1.12	по 1 балу	12 балів
2.1 – 2.6	по 2 бали	12 балів
3.1 – 3.4	по 4 бали	16 балів
Усього балів		40 балів

Відповідність кількості набраних балів *учнем загальноосвітнього класу* оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено у таблиці 2.

Таблиця 2.

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів
1 – 2	1
3 – 4	2
5 – 6	3
7 – 9	4
10 – 12	5
13 – 16	6
17 – 20	7
21 – 24	8
25 – 28	9
29 – 32	10
33 – 36	11
37 – 40	12

Систему нарахування балів за правильно виконане завдання для оцінювання робіт *учнів класів з поглибленим вивченням математики* наведено у таблиці 3.

Таблиця 3.

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1.1 – 1.12	по 1 балу	12 балів
2.1 – 2.6	по 2 бали	12 балів
3.1 – 3.4	по 4 бали	16 балів
4.1 – 4.3	по 4 бали	12 балів
Усього балів		52 бали

Відповідність кількості набраних балів *учнем класу з поглибленим вивченням математики* оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено у таблиці 4.

Таблиця 4.

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів
1 – 4	1
5 – 8	2
9 – 12	3
13 – 16	4
17 – 20	5
21 – 24	6
25 – 29	7
30 – 35	8
36 – 40	9
41 – 44	10
45 – 48	11
49 – 52	12

Якщо у бланку відповідей вказана правильна відповідь до завдання першої чи другої частини, то за це нараховується 1 чи 2 бали відповідно до таблиць 1 і 3. Якщо вказана відповідь є неправильною, то бали за таке завдання не нараховуються. У деяких випадках за часткове виконання завдання другої частини нараховується 1 бал (якщо знайдено правильно один з двох розв'язків системи рівнянь, одна з мір центральної тенденції вибірки тощо).

Якщо учень вважає за потрібне внести зміни у відповідь до якогось із завдань першої чи другої частини, то він має це зробити у спеціально відведеній для цього частині бланку. Таке виправлення не веде до втрати балів. Якщо ж виправлення зроблено в основній частині бланку відповідей, то бали за таке завдання не нараховуються.

Формулювання завдань третьої і четвертої частин учні не переписують, а вказують тільки номер завдання. Виправлення і закреслювання в оформленні розв'язування завдань третьої і четвертої частин, якщо вони зроблені акуратно, не є підставою для зниження оцінки.

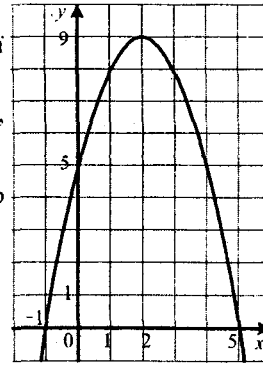
Розглянемо приклади оцінювання типових задач третьої та четвертої частин.

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y=-x^2+4x+5$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) область значень функції;

2) проміжок спадання функції.

Розв'язання.



Дана функція є квадратичною функцією, її графік — парабола, вітки якої напрямлені вниз.

Абсциса вершини параболи $x_0 = -\frac{4}{-2} = 2$, ордината вершини $y_0 = y(2) = -4 + 8 + 5 = 9$.

Знайдемо точки перетину параболи з віссю абсцис:

$$-x^2 + 4x + 5 = 0;$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0;$$
$$x_1 = -1;\ x_2 = 5.$$

Таким чином, парабола перетинає вісь абсцис у точках (–1; 0) и (5; 0).

Знайдемо точку перетину параболи з віссю ординат: $y(0) = 5$. Парабола перетинає вісь ординат у точці (0; 5).

Використовуючи знайдені чотири точки параболи, виконаємо її побудову. Графік даної функції зображено на рисунку.

1) Область значень функції $E(y) = (-\infty; 9]$.

2) Функція спадає на проміжку $[2; +\infty)$.

Схема оцінювання приклада 1.

1. Якщо учень правильно визначив напрям віток параболи, знайшов координати її вершини, точок перетину з осями координат, то він отримує 1 бал.
2. За правильно побудований графік учень отримує ще 1 бал.
3. Якщо учень правильно знайшов область значень функції, то він отримує 1 бал.
4. Якщо учень правильно вказав проміжок спадання функції, то він отримує ще 1 бал.

Приклад 2. Одна машина працювала на розчищенні ковзанки 25 хв, а потім її змінила друга машина, яка закінчила розчищення за 16 хв. За скільки часу може розчистити ковзанку кожна машина, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 9 хв більше, ніж другій?

Розв'язання.

Нехай перша машина може розчистити ковзанку самостійно за x хв, тоді другій для цього потрібно $(x-9)$ хв. За 1 хв перша машина розчищає $\frac{1}{x}$ частину ковзанки, а друга — $\frac{1}{x-9}$. За 25 хв перша машина розчистила $\frac{25}{x}$ частину ковзанки, а друга за 16 хв — $\frac{16}{x-9}$ частину. Оскільки в результаті їх роботи була розчищена вся ковзанка, то $\frac{25}{x} + \frac{16}{x-9} = 1$.

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$\frac{25}{x}+\frac{16}{x-9}=1;$$

$$\frac{25(x-9)+16x}{x(x-9)}=1;$$

$$25x-225+16x=x^2-9x;$$

$$x^2-50x+225=0;$$

$$x_1=45;\ x_2=5.$$

Корінь 5 не задовольняє умову задачі, оскільки при $x=5$ маємо: $x-9=5-9<0$. Отже, першій машині потрібно для самостійного розчищення ковзанки 45 хв, а другій — 36 хв.

Відповідь: 45 хв; 36 хв.

Схема оцінювання приклада 2.

1. Якщо учень, увівши змінну, правильно виразив через неї відповідні величини, то він отримує 1 бал.
2. Якщо учень правильно склав рівняння, то він отримує ще 1 бал.
3. Якщо учень у результаті перетворень правильно отримав відповідне квадратне рівняння, то йому нараховується ще 1 бал.
4. Якщо учень розв'язав квадратне рівняння, проаналізував отриманий результат за змістом задачі і дав відповідь, то він отримує ще 1 бал.

Приклад 3. Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії $-3{,}5; -3{,}1; -2{,}7; \dots$.

Розв'язання.

Перший член даної прогресії $a_1=-3{,}5$, другий член $a_2=-3{,}1$, різниця прогресії $d=a_2-a_1=-3{,}1-(-3{,}5)=0{,}4$. Тоді $a_n=-3{,}5+0{,}4(n-1)=$ $=0{,}4n-3{,}9$. Знайдемо кількість від'ємних членів прогресії:

$$0{,}4n-3{,}9<0;$$

$$0{,}4n<3{,}9;$$

$$n<9\frac{3}{4}.$$

Отже, прогресія містить дев'ять від'ємних членів.

Тоді шукана сума $S_9=\dfrac{2\cdot(-3{,}5)+0{,}4(9-1)}{2}\cdot 9=-17{,}1$.

Відповідь: $-17{,}1$.

Схема оцінювання приклада 3.

1. Якщо учень правильно знайшов різницю прогресії, то він отримує 1 бал.
2. Якщо учень правильно склав нерівність для знаходження кількості від'ємних членів прогресії, то він отримує ще 1 бал.
3. За правильне знаходження кількості від'ємних членів прогресії нараховується ще 1 бал.

4. Якщо учень правильно обчислив суму від'ємних членів прогресії, то він отримує ще 1 бал.

Приклад 4. Знайдіть область визначення функції

$$f(x)=\sqrt{6x-x^2}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}.$$

Розв'язання.

Областю визначення даної функції є множина розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases}6x-x^2\ge 0,\\ 5-x>0.\end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases}x^2-6x\le 0,\\ x<5;\end{cases}\quad \begin{cases}0\le x\le 6,\\ x<5;\end{cases}\quad 0\le x<5.$$

Отже, шукана область визначення — це така множина:

$$D(f)=[0;5).$$

Відповідь: $[0;5)$.

Схема оцінювання приклада 4.

1. Якщо учень правильно склав систему нерівностей, яка задає область визначення функції, то він отримує 1 бал.
2. За правильне розв'язання нерівності другого степеня учень отримує ще 1 бал.
3. Правильне розв'язання лінійної нерівності, яка входить до системи, оцінюється 1 балом.
4. Якщо учень правильно записав множину розв'язків системи у вигляді подвійної нерівності або у вигляді числового проміжку, то він отримує ще 1 бал.

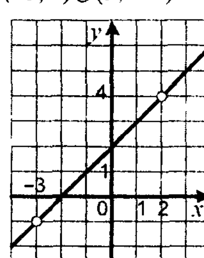
Приклад 5. Побудуйте графік функції $y=\frac{2x^2-5x+2}{x-2}-\frac{x^2-9}{x+3}$.

Розв'язання.

Область визначення даної функції $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;2)\cup(2;+\infty)$.

Маємо: $y=\frac{2x^2-5x+2}{x-2}-\frac{x^2-9}{x+3}=$

$$=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{x-2}-\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=2x-1-x+3=x+2.$$



Отже, графіком даної функції є пряма $y=x+2$, з якої «виколото» точки $(-3;-1)$ і $(2;4)$.

На рисунку зображено графік даної функції.

Схема оцінювання приклада 5.

1. Якщо учень правильно вказав область визначення даної функції, то він отримує 1 бал.
2. Якщо учень правильно перетворив формулу, якою задано функцію, то він отримує ще 1 бал.
3. Якщо учень правильно описав графік даної функції, то він отримує 1 бал.
4. За правильно виконану побудову графіка учень отримує ще 1 бал.

Приклад 6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}, \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$

Розв'язання.

Подамо перше рівняння у вигляді

$$(x^2-y^2)+(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-12=0\,.$$

Нехай $(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=t$, тоді $x^2-y^2=t^2$. Маємо: $t^2+t-12=0$; $t=-4$ або $t=3$.

Розглянемо два випадки.

1) $x>y$. Тоді рівняння $(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=-4$ розв'язків не має.

Маємо: $\begin{cases} (x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=3, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=25, \\ y^2=16. \end{cases}$

Остання система має чотири розв'язки: (5; 4), (–5; –4), (–5; 4), (5; –4), з яких умову $x>y$ задовольняють тільки два: (5; 4), (5; –4).

2) $x<y$. Тоді рівняння $(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=3$ розв'язків не має.

Маємо: $\begin{cases} (x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=-4, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=\dfrac{57}{2}, \\ y^2=\dfrac{25}{2}. \end{cases}$

Остання система має чотири розв'язки: $\left(\dfrac{\sqrt{114}}{2};\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{114}}{2};-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{114}}{2};\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{114}}{2};-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, з яких умову $x<y$ задовольняють тільки два: $\left(-\dfrac{\sqrt{114}}{2};-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{114}}{2};\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Відповідь: (5; 4), (5; –4), $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

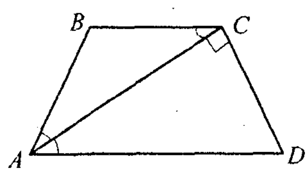
Схема оцінювання приклада 6.

1. Якщо учень правильно перетворив перше рівняння системи до вигляду $(x^2-y^2)+(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}-12=0$, то він отримує 1 бал.
2. Якщо учень виконав заміну і розв'язав отримане квадратне рівняння, то йому нараховується ще 1 бал.
3. Якщо учень правильно розглянув один з можливих випадків, то він отримує 1 бал, якщо ж два випадки, то він отримує 2 бали.

Розв'язання задач з геометрії передбачає виконання рисунка, обґрунтування рівності відрізків, кутів, трикутників та інших фігур, подібності трикутників, паралельності чи перпендикулярності прямих, положення центрів описаного і вписаного кіл. Кожен з таких кроків оцінюється певним чином.

Приклад 7. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.

Розв'язання.



У трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $BC = 6$ см, $AB = CD$, $AC \perp CD$, $\angle BAC = \angle CAD$.

$\angle CAD$ і $\angle BCA$ рівні як різносторонні при $BC \parallel AD$ та січній AC.

Отже, $\angle BAC = \angle BCA$. Тоді ΔABC — рівнобедрений. Звідси $CD = AB = BC = 6$ см.

Нехай $\angle CAD = \alpha$. Тоді $\angle CDA = \angle BAD = 2\alpha$.

З ΔACD ($\angle ACD = 90°$):

$$\angle CAD + \angle CDA = 90°;$$
$$\alpha + 2\alpha = 90°;$$
$$\alpha = 30°.$$

Отже, ΔACD – прямокутний з гострим кутом 30°. Тоді $AD = 2CD = 12$ см.

Периметр трапеції $P = 3BC + AD = 30$ см.

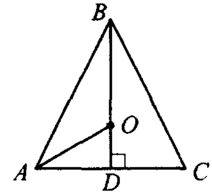
Відповідь: 30 см.

Схема оцінювання приклада 7.

1. Якщо учень установив і обґрунтував рівність відрізків AB і BC, то він отримує 1 бал.
2. Якщо учень знайшов кути трикутника ACD, то він отримує ще 1 бал.
3. За знаходження більшої основи трапеції учень отримує ще 1 бал.
4. Якщо учень правильно знайшов периметр трапеції, то він отримує ще 1 бал.

Приклад 8. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а радіус вписаного в нього кола — 5 см. Знайдіть площу даного трикутника.

Розв'язання.



У трикутнику ABC $AB = BC$, відрізок BD — висота, $BD = 18$ см, точка O — центр вписаного кола

Оскільки ΔABC — рівнобедрений, то точка O належить його висоті і бісектрисі BD, а відрізок OD — радіус вписаного кола, $OD = 5$ см. Тоді $BO = BD - OD = 13$ см.

Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис трикутника. Тоді відрізок AO — бісектриса трикутника ADB.

За властивістю бісектриси трикутника $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{13}{5}$.

Нехай $AB = 13x$ см, $x > 0$, тоді $AD = 5x$ см.

З ΔADB ($\angle ADB = 90°$):

$$AB^2 - AD^2 = BD^2;$$
$$169x^2 - 25x^2 = 18^2;$$
$$144x^2 = 18^2;$$
$$12x = 18;$$
$$x = 1{,}5.$$

Отже, $AD = 7{,}5$ см.

Площа трикутника ABC $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AD \cdot BD = 7{,}5 \cdot 18 = 135$ (см^2).

Відповідь: 135 см^2.

Схема оцінювання приклада 8.

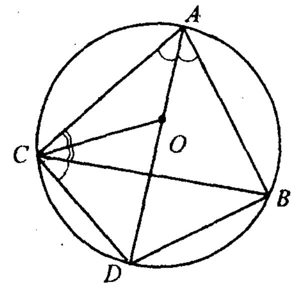
1. Якщо учень обґрунтував положення точки O і установив, що відрізок AO — бісектриса трикутника ABD, то він отримує 1 бал.
2. Якщо учень знайшов відношення відрізків AB і AD, то він отримує ще 1 бал.
3. Правильне знаходження коефіцієнта пропорційності відрізків AB і AD оцінюється ще 1 балом.
4. За правильне обчислення довжини основи трикутника і його площі учень отримує ще 1 бал.

Приклад 9. Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $DO = DB = DC$.

Розв'язання.

Оскільки промінь AD є бісектрисою $\angle BAC$, то $\cup CD = \cup BD$. Отже, хорди DC і DB, які стягують ці дуги, рівні.

Центр O вписаного кола трикутника ABC належить бісектрисі AD кута BAC.



Розглянемо ΔCOD. Кут COD є зовнішнім кутом ΔAOC, тоді $\angle COD = \angle ACO + \angle CAO$.

Оскільки вписані кути DCB і DAB спираються на дугу DB, то $\angle DCB = \angle DAB$. Тоді $\angle DCO = \angle DCB + \angle OCB = \angle DAB + \angle ACO =$
$= \angle CAO + \angle ACO = \angle COD$.

Отже, ΔCDO — рівнобедрений, $DC = DO$.

Схема оцінювання приклада 9.

1. Якщо учень довів, що $DB = DC$, то він отримує 1 бал.
2. Якщо учень виразив кут COD через кути трикутника AOC, то він отримує 1 бал.
3. Якщо учень виразив кут DCO через кути трикутника AOC, то він отримує ще 1 бал.
4. Якщо учень зробив висновок, що ΔCDO — рівнобедрений і $DC = DO$, то він отримує 1 бал.