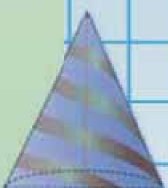
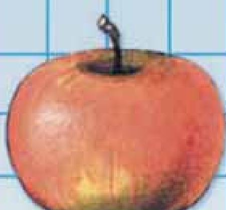
Г. В. Апостолова

Геометрія

7





Багаторівневий підручник, за яким можна працювати з учнями за різними ступенями змістового наповнення — від обов'язкового за державним стандартом до факультативного. Це досягається за рахунок включення як програмного, так і позапрограмного матеріалу, відомостей щодо становлення геометрії як науки, великого обсягу дидактичного матеріалу для різних видів навчальної діяльності учнів на уроці, самостійної й позакласної роботи, для забезпечення організаційної та мотиваційної спрямованості уроків геометрії.

Підручник містить 6 розділів та 31 параграф. Перші чотири розділи відповідають змістовим лініям курсу геометрії 7 класу. Початок кожного супроводжується ***анотацією***. П'ятий розділ присвячено ***повторенню курсу геометрії*** через перелік запитань для повторення та тестових завдань. До останнього розділу ***«Цікаві додатки»*** включено позапрограмний матеріал, елементи якого дозволять «оживити» урок. Цьому сприятиме і рубрика ***«Для допитливих»*** .

Перші чотири розділи містять рубрики ***«Задачі та вправи»***, ***«Запитання для повторення»***, ***«Готуємось до тематичного оцінювання»***. Задачі та вправи диференційовано за чотирма рівнями складності. ***Рівні складності*** виокремлено відповідними позначками в нумерації: кружечком позначено номери задач початкового рівня, без позначки — основні задачі (середнього, достатнього і високого рівнів), зірочкою — підвищеної складності, двома зірочками — задачі олімпіадного характеру. Завдання для підготовки до тематичного оцінювання подано у двох варіантах. Номери задач, рекомендованих для ***домашньої роботи***, виділено кольором.

Основні опорні факти, про які йдеться у змісті параграфів, винесено на поля. Це допоможе їх запам'ятати і, за потреби, повторити. У підручнику акцентовано увагу і на ***опорні задачі***, їх виділено жирним шрифтом і відповідною піктограмою.

З метою формування практичних навичок у побудові геометричних фігур та дослідженні їх властивостей після кожного параграфа пропонується одна або кілька ***практичних робіт***.

До кожного параграфа подано ***приклади розв'язування задач*** та запропоновано зразки запису їх розв'язання, у тому числі й за допомогою символів та позначень, перелік яких систематизовано на форзацах. Окрім того, на ***форзаци*** винесено інформацію про одиниці вимірювання довжини та грецьку абетку.

Зміст підручника вдало доповнено рубриками ***«Додаткові задачі»*** та параграфами, що містять ***позапрограмний матеріал*** та ***матеріал для ознайомлення***, які виділено відповідними піктограмами. Їх можна використовувати для більш глибокого опанування предмета та організації позаурочної роботи.

У кінці підручника на учнів чекає ***«Словничок-покажчик»*** термінів та понять, що вивчатимуться, та ***«Відповіді й поради»***, що допоможуть перевірити правильність відповідей до завдань або віднайти шлях їх розв'язання.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ УЧНІВ

У підручнику використано такі піктограми:

 – означення; О.З. – опорна задача;

Т – теорема; Н – наслідок;

 – матеріал для ознайомлення;

 – додатковий матеріал.

На поля підручника винесено *головну (опорну)* інформацію. Це допоможе її запам'ятати та за потреби повторити.

Параграфи, які позначено піктограмою , бажано прочитати, ознайомившись з їх змістом. Це полегшить подальше розуміння навчального матеріалу та допоможе у розв'язуванні задач.

Параграфи та матеріал, які позначено піктограмою , рубрики «*Для допитливих*» та «*Додаткові задачі*», розділ «*Цікаві додатки*» призначено для більш ширшого і глибшого ознайомлення з геометрією та з історією її виникнення і розвитку.

Приступаючи до розв'язування задач, бажано спочатку виконати *практичні роботи* та звернути увагу на *опорні задачі* (їх позначено піктограмою О.З.).

Під час розв'язування задач, номери яких виділено двома зірочками, окрім знань, вам знадобляться ще й кмітливість і фантазія.

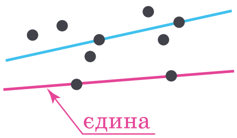
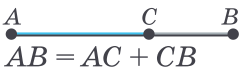
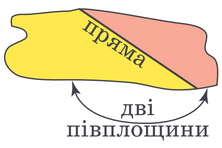
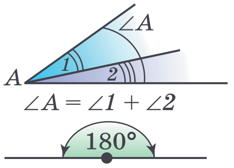
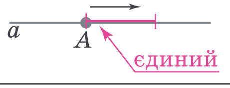
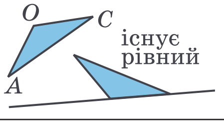
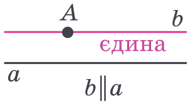
Завдання рубрик «*Запитання для повторення*», «*Задачі та вправи*», «*Готуємось до тематичного оцінювання*» допоможуть закріпити вивчене та підготуватися до самостійних і контрольних робіт, а розділ «*Узагальнення і систематизація знань з курсу геометрії 7 класу*» – до підсумкового оцінювання.

У кінці підручника на тебе чекає «*Словничок-покажчик*» термінів та понять з геометрії, що вивчатимуться, а «*Відповіді й поради*» допоможуть переконатися у правильності виконання завдань, інколи ще й підкажуть шлях до їх розв'язання.

Символи та позначення, що використовуються для запису математичних, зокрема, й геометричних тверджень, подано на форзацах підручника. Окрім того, форзаци містять грецьку абетку, що також використовують для позначень, та перелік одиниць вимірювання довжини у їх взаємозв'язку та історичному розвитку.

Автор

Аксіоми евклідової геометрії

А-I. 	I. **Якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.**
А-II. 	II. **З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.**
А-III. 	III. **Кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю точкою.**
А-IV. 	IV. **Пряма розбиває площину на дві півплощини.**
А-V. 	V. **Кожен кут має певну міру, більшу за нуль. Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що виходить з його вершини і проходить між його сторонами. Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.**
А-VI. 	VI. **На будь-якій прямій від заданої точки в заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і при цьому тільки один.**
А-VII. 	VII. **Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти заданий кут з вершиною в початку цієї півпрямої і при цьому тільки один.**
А-VIII. 	VIII. **Яким би не був трикутник, існує трикутник, рівний даному в заданому розміщенні відносно заданої прямої.**
А-IX. 	IX. **Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.**

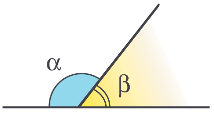
II
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Вивчаючи цей розділ, ви дізнаєтеся:
- **про суміжні й вертикальні кути та їх властивості;**
- **як можна скорочено записати розв'язання геометричної задачі;**
- **про перпендикулярні й паралельні прямі, їх властивості та ознаки;**
- **що таке «спосіб доведення від супротивного»;**
- **про види математичних тверджень.**

§ 6. Суміжні кути

Означення. ***Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона є спільною, а дві інші утворюють пряму (є доповняльними променями).***

ВЛАСТИВОСТІ СУМІЖНИХ КУТІВ



$\alpha + \beta = 180°$

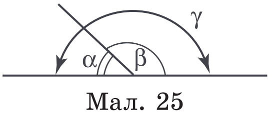
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Теорема. ***Сума суміжних кутів дорівнює*** 180°.

Доведення

Два суміжних кути утворюють розгорнутий кут (мал. 25). Тому (за аксіомою про відкладання кутів) їх сума дорівнює 180°, *що й вимагалося довести*.

Скорочений запис доведення цієї теореми зручно подати в такому вигляді.



Мал. 25

Дано: α і β – суміжні кути.
Довести: $\alpha + \beta = 180°$.

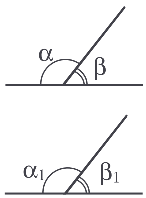
1) γ – розгорнутий кут. Тоді $\gamma = 180°$;

2) $\alpha + \beta = \gamma = 180°$. *Щ. в. д.*

Н а с л і д о к. ***Якщо два кути між собою рівні, то і суміжні з ними кути між собою рівні.***

Д о в е д е н н я

Нехай кут β є суміжним з кутом α, а кут β_1 – суміжний з кутом α_1 і $\alpha = \alpha_1$ (мал. 26). Доведемо, що $\beta = \beta_1$.



Мал. 26

1) За умовою кути α і β – суміжні. Тоді $\alpha + \beta = 180°$.
2) За умовою кути α_1 і β_1 – суміжні. Тоді $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$.
3) За умовою $\alpha = \alpha_1$. Тоді $\beta = 180° - \alpha = 180° - \alpha_1 = \beta_1$. *Щ. в. д.*

Як записують розв'язання геометричних задач

Перш ніж перейти до розв'язування задач, домовимося, що запис розв'язання геометричної задачі – це виокремлення і запис логічних кроків її розв'язування. Запис доцільно виконувати математичною мовою, а не відтворювати письмово мовний опис процесу розв'язування. (Це допомагає скоротити записи.)

Розв'язування задач з планіметрії, як правило, передбачає такі етапи:

1) виконання малюнка до задачі;
2) нанесення позначень на малюнок;
3) скорочений запис вихідних даних умови задачі через уведені позначення;
4) запис твердження, яке треба довести, або того, що треба знайти;
5) позначення того, що запис умови закінчено: зазвичай проводять горизонтальну риску або пишуть слово «розв'язання» («доведення»);
6) запис логічних кроків розв'язання (доведення):
   – треба доводити ті співвідношення, що ми використовуємо і які не збігаються з твердженнями умови та не є аксіомами або теоремами;

«Щ. в. д.» – скорочення від «що й вимагалося довести».

Якщо два кути рівні, то і суміжні з ними кути рівні.

Етапи розв'язування:

1) малюнок;

2) позначення на малюнку;

3) скорочений запис вихідних даних умови;

4) скорочений запис того, що треба довести (знайти);

5) відокремлення умови від початку розв'язання;

6) запис логічних кроків міркувань та обчислень;

7) відповідь (щ. в. д.).

Для допитливих

Вислів «Що й вимагалося довести» уперше застосував видатний грецький математик Евклід. У його книзі «Начала» цими словами закінчувалося доведення кожного математичного твердження.

Серед сучасних математиків можна почути такий жарт: «Довершеністю своїх "Начал" Евклід затримав розвиток геометрії на дві тисячі років!».

– логічний крок має структуру: вихідне твердження; «тоді» («→»); твердження-висновок;
– вихідними твердженнями логічного кроку можуть бути: твердження умови задачі, аксіоми і теореми геометрії та твердження, які було доведено в попередніх логічних кроках;

7) записати відповідь або «що й вимагалося довести» (скорочено «щ. в. д.»).

Приклади такого запису доведення математичною мовою ми вже наводили раніше.

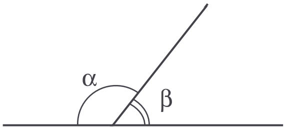
Під час запису розв'язання *можна використовувати* скорочення та позначення*. (Див. форзац в кінці підручника.)

Зауваження. Застосування позначень і скорочень не є обов'язковим. Але вони можуть допомогти чітко й лаконічно записати умову або розв'язання геометричної задачі.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

0.3 Приклад 1. **Доведіть, що кожний із суміжних кутів менший від 180°.**

Дано: α і β – суміжні.
Довести: $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$.



Доведення

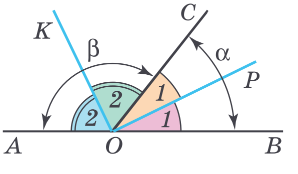
1) α і β – суміжні $\rightarrow \alpha + \beta = 180°$;

2) $\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{array}\right| \rightarrow \alpha < 180°$ і $\beta < 180°$.

Щ. в. д.

0.3 Приклад 2. **Доведіть, що бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.**

Дано: α і β – суміжні, $OP \equiv l_{\alpha}$, $OK \equiv l_{\beta}$.
Довести: $\angle KOP = 90°$.



1) $\angle POB = COP \ \square \ \angle 1$; $\angle AOK = \angle KOC \ \square \ \angle 2$.

2) α і β – суміжні $\rightarrow 2\angle 1 + 2\angle 2 = 180°$.

3) $\angle KOP = \angle 1 + \angle 2 = 90°$.

Щ. в. д.

Приклад 3. Один із суміжних кутів на 30° більший за другий. Знайдіть ці кути.

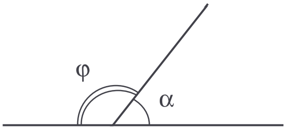
---

* Радимо в запису розв'язування задач користуватися стрілкою «→». Запис через знак логічного слідування «⇒» може приводити до фактичних помилок, оскільки знак теорії множин (предиката) вимагає переліку *всіх* вихідних умов, з яких випливає наслідок, зокрема і тверджень умови, позначень, тверджень, отриманих у попередніх логічних кроках, які ми інколи не пишемо, а маємо на увазі. (Так, у прикладі 2, с. 36 у п. 2 маємо на увазі, що $\alpha = 2\angle 1$, $\beta = 2\angle 2$.)

Дано: γ і β – суміжні; $\gamma - \beta = 30°$.
Знайти: γ, β.

1) γ і β – суміжні $\to \gamma + \beta = 180°$.
2) $\left.\begin{array}{l}\gamma + \beta = 180° \\ \gamma = \beta + 30°.\end{array}\right| \to \beta + 30° + \beta = 180°;\ 2\beta + 30° = 180°.$
3) Отже, $\beta = 75°$, $\gamma = 180° - 75° = 105°$.
Відповідь: 105°; 75°.

П р и к л а д 4. Знайдіть суміжні кути, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 7.



Дано: α і φ – суміжні; $\alpha : \varphi = 3 : 7$.
Знайти: α, φ.

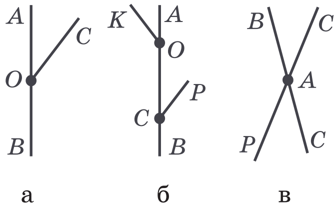
Р о з в ' я з а н н я

1) α і φ – суміжні, тоді $\alpha + \varphi = 180°$;
2) $\alpha : \varphi = 3 : 7$, тоді $\alpha = 3t$, $\varphi = 7t$; $\alpha + \varphi = 10t$;
3) $\alpha + \varphi = 180° = 10t$, тоді $t = 18°$ і $\alpha = 3 \cdot 18° = 54°$, $\varphi = 7 \cdot 18° = 126°$.
Відповідь: 54°; 126°.

Практична робота 8

1. Побудуйте три довільних кути: гострий, тупий і прямий. Для кожного з них побудуйте суміжний кут. Скількома способами це можна зробити? Що можна сказати про побудовані кути?
2. Проведіть дві прямі, які перетинаються в точці A. Назвіть усі пари суміжних кутів, що при цьому утворилися.
3. Проведіть 3 прямі, які мають спільну точку O, і назвіть усі пари суміжних кутів, що утворилися. Скільки таких пар?
4*. Скільки пар суміжних кутів утвориться при перетині шести прямих, що проходять через спільну точку?
5.** А якщо прямих у задачі 4 буде n?

Задачі та вправи



Мал. 27

72°. Скільки пар суміжних кутів на малюнку 27? Назвіть їх.
73°. Чи може сума двох суміжних кутів дорівнювати 123°?
74°. Чи можуть обидва суміжні кути бути: **а)** гострими; **б)** тупими; **в)** прямими?
75°. Чи може кут, суміжний з прямим, бути: **а)** гострим; **б)** тупим; **в)** прямим?
76°. Які з наступних пар кутів можуть бути суміжними: **а)** 23° і 157°; **б)** 20° і 163°; **в)** 120° і 35°; **г)** 81° і 99°?
77°. Знайдіть кут, суміжний з кутом градусної міри: **а)** 30°; **б)** 120°; **в)** 90°.
78°. Один із суміжних кутів дорівнює 32°. Знайдіть другий кут.
79°. Знайдіть градусну міру кута, якщо відомо, що суміжний з ним кут дорівнює 123°.

80°. Якщо продовжити одну зі сторін кута, то утвориться кут градусної міри 47°. Знайдіть міру заданого кута.

81. Один кут більший за другий. Порівняйте кути, суміжні з ними.

82. Один кут менший за другий. Порівняйте кути, суміжні з ними.

83. Один із суміжних кутів удвічі більший за другий. Знайдіть градусні міри цих кутів.

84. Один із суміжних кутів утричі менший за другий. Знайдіть градусні міри цих кутів.

85. Знайдіть градусні міри суміжних кутів, якщо їх різниця дорівнює 30°.

86. Один із суміжних кутів на 20° більший за другий. Знайдіть ці кути.

87. Один із суміжних кутів складає $\frac{2}{3}$ від їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

88. Відомо, що один із суміжних кутів становить $\frac{2}{3}$ від другого. Знайдіть ці кути.

89*. Різниця двох суміжних кутів дорівнює половині їх суми. Знайдіть ці кути.

90*. Один кут удвічі менший за другий. Чи правильно, що кут, суміжний з першим, удвічі більший за кут, суміжний з другим?

91*. Третина одного кута дорівнює четвертій частині іншого кута. Який із суміжних з ними кутів є більшим?

92*. Установіть, які з наступних тверджень є правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то ці кути суміжні.
2) Якщо сума двох кутів зі спільною вершиною дорівнює 180°, то ці кути суміжні.
3) Якщо сума двох кутів, по одній стороні яких належить спільній прямій, дорівнює 180°, то ці кути суміжні.
4) Якщо сума двох кутів зі спільною стороною і спільною вершиною дорівнює 180°, то ці кути суміжні.

93*. Знайдіть градусні міри двох суміжних кутів, якщо вони відносяться як: **а)** 3 : 1; **б)** 2 : 3; **в)** 5 : 7.

94**. Знайдіть суміжні кути ABC і PBC, якщо бісектриса кута PBC утворює з променем BA кут, більший за кут ABC на 30°.

95**. Менший із суміжних кутів у 4 рази менший, ніж різниця цих суміжних кутів. Знайдіть ці кути.

96**. Різниця двох суміжних кутів становить 30 % від їх суми. Знайдіть ці кути.

97**. Бісектриса кута утворює з його стороною кут, градусна міра якого дорівнює куту, суміжному з даним. Знайдіть градусну міру заданого кута.

98**. Скільки разів на добу стрілки годинника утворюють:

а) розгорнутий кут;

б) прямий кут?

135**. Перпендикулярно до сторін тупого кута з початком у його вершині провели два промені так, що утворений цими променями кут – гострий. Доведіть, що сума цього гострого кута і заданого тупого кута дорівнює 180°.

Запитання для повторення до § 6–8

1°. Які кути називають суміжними?
2°. Сформулюйте властивість суміжних кутів.
3°. Чи можуть обидва суміжні кути бути: **а)** гострими; **б)** тупими; **в)** прямими? Чому?
4°. Визначте вид кута, якщо суміжний з ним кут є: **а)** гострим; **б)** тупим; **в)** прямим.
5°. Порівняйте два кути, про які відомо, що: **а°)** суміжні з ними кути між собою рівні; **б)** суміжний з першим більший від суміжного з другим.
6°. Які два кути називають вертикальними?
7°. Сформулюйте властивість вертикальних кутів. Чи вимагає вона доведення?
8°. Сформулюйте означення паралельності двох прямих.
9°. Скільки прямих можна провести паралельно заданій прямій через задану точку поза даною прямою? Чи вимагає вказана вами відповідь доведення?
10°. Чи рівні між собою два кути, якщо вони є вертикальними до рівних між собою кутів?
11°. Який кут називають кутом між двома прямими?
12°. Які дві прямі називають перпендикулярними?
13°. Поясніть, що є: **а)** перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки; **б)** основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої; **в)** відстанню від точки до прямої. Наведіть приклад з довкілля.
14. Доведіть, що існує тільки одна пряма, яку можна провести перпендикулярно до даної прямої через дану на прямій точку. Як називають спосіб доведення, яким ви скористалися?
15. **а)** Поясніть, що таке спосіб доведення від супротивного. **б)** Які логічні кроки міркування вимагає його застосування? **в)** Наведіть приклад застосування цього способу.
16. Відомо, що пряма є паралельною одній з двох паралельних прямих. Як вона розміщена відносно другої із цих паралельних прямих? Доведіть правильність своєї відповіді.
17. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то чи завжди вона перетинатиме другу? Доведіть правильність своєї відповіді.

Для допитливих

Із давньогрецької «*parallelos*» перекладається як *ті, що йдуть поряд*. Ця назва використовувалася піфагорійцями 2500 років тому.

Давньогрецький учений *Папп* позначав паралельні прямі символом «=». Після того як англієць *Роберт Рекорд* увів знак рівності «=», знак паралельності оновили, змінивши направлення рисочок. У XVIII ст. його стали писати так, як сьогодні його пишемо ми, – «‖».

Додаткові задачі до § 6–8

136. $\angle AOB$ і $\angle COP$ – вертикальні. Промінь OK є бісектрисою кута AOB і утворює з променем OA кут $20°$. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle POC$, $\angle KOC$.

137. Два кути мають спільну вершину. Їх відповідні сторони взаємно перпендикулярні. Чи можуть ці кути бути вертикальними?

138. На аркуші паперу накреслили кут, але його вершина на цей аркуш не вмістилася. Чи можна, користуючись лише олівцем, провести бісектрису цього кута без допомоги інших креслярських інструментів?

139. Знайдіть кожний з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

1) міра одного з них становить $\frac{8}{9}$ від прямого кута;
2) сума двох з них дорівнює $56°$;
3) різниця двох з них дорівнює $58°$;
4) сума двох з них дорівнює $240°$;
5) один з них становить 50 % від суміжного з ним;
6) сума двох з них становить 80 % від суми двох інших;
7) сума двох з них у 5 разів більша за суму двох інших.

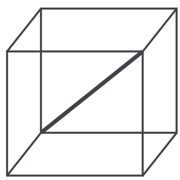
140. Знайдіть градусну міру кута між бісектрисами:
а) суміжних кутів; **б)** вертикальних кутів.

141. Бісектриса кута утворює зі стороною цього кута кут, градусна міра якого дорівнює третині кута, суміжного з даним. Знайдіть міру заданого кута.

142. Бісектриси двох суміжних кутів утворюють рівні кути з їх спільною стороною. Що можна сказати про ці суміжні кути? Відповідь обґрунтуйте.

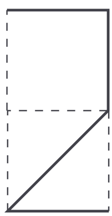
143. Доведіть способом від супротивного, що
1) два тупих кути не можуть бути суміжними;

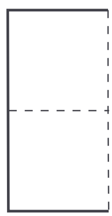
Для допитливих

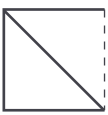


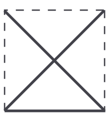
1. Куб зробили з дроту і з'єднали шматочками цього дроту дві протилежні вершини куба, як показано на малюнку. Намалюйте, що ви побачите, якщо подивитеся на цей куб: **а)** зверху; **б)** знизу; **в)** спереду; **г)** ззаду.

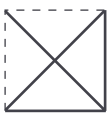
2. Аліса запустила павука у прозору коробку. Коли через деякий час вона подивилася на неї спереду, то побачила павутиння у вигляді **(а)**, а подивившись з правого боку, – у вигляді **(б)**. На якому з малюнків **(А, Б, В, Г, Д)** зображено павутиння, якщо на нього дивитися зверху? Намалюйте загальний вигляд цього павутиння.

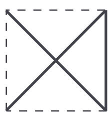

а

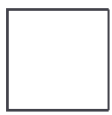

б


А


Б


В


Г


Д

2) прямий і гострий кути не можуть бути парою вертикальних кутів;
3) кожний кут має лише одну бісектрису;
4) якщо бісектриси кутів AOB і COP не лежать на одній прямій, то ці кути не вертикальні.

144. Знайдіть суміжні кути, якщо бісектриса одного з них утворює зі стороною другого кут, менший від одного з даних кутів на 36°.

145. Чи можна за допомогою шаблона кута градусної міри 27° побудувати дві взаємно перпендикулярні прямі?

Готуємося до тематичного оцінювання № 2

ВАРІАНТ 1

У завданні 1 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

1. (2 б.) Укажіть правильні твердження.

А. Два суміжних кути не можуть бути прямими.
Б. Два вертикальних кути можуть бути тупими.
В. Якщо два кути мають спільну вершину, то такі кути суміжні.
Г. Якщо два кути між собою рівні, то й суміжні з ними кути між собою рівні.
Д. Відношення градусних мір кутів, що утворилися при перетині двох прямих, може дорівнювати 20 : 17 : 20 : 17.

Завдання 2 і 3 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДИН є правильним. Оберіть правильний, на вашу думку, варіант відповіді.

2. (1 б.) Знайдіть градусну міру кута, якщо суміжний з ним кут дорівнює 52°.

А	Б	В	Г	Д
38°	138°	90°	128°	142°

3. (1 б.) При перетині двох прямих утворилося чотири кути, один з яких дорівнює 120°. Знайдіть усі інші кути.

А	Б	В	Г	Д
120°, 60°, 120°	60°, 120°, 60°	30°, 150°, 30°	150°, 30°, 150°	інша відповідь

До завдань 4 і 5 треба записати відповідь (за потреби виконати малюнок).

4. (1 б.) Знайдіть градусні міри двох суміжних кутів, якщо вони відносяться як 2 : 3.

5. (2 б.) Знайдіть кожний з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох з них дорівнює 58°.

У завданнях 6 і 7 треба виконати малюнок, записати розв'язання і відповідь.

6. (2 б.) Прямі AB і KM взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці C. Промінь CH проходить між променями CA і CK та утворює $\angle ACH = 63°$. Знайдіть $\angle HCM$.

7. (2 б.) Доведіть способом від супротивного твердження, що якщо кути між собою не рівні, то вони не вертикальні.

ВАРІАНТ 2

У завданні 1 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

1. (2 б.) Укажіть правильне твердження.

А. Два суміжних кути можуть бути між собою рівними.

Б. Два вертикальних кути не можуть бути тупими.

В. Якщо два кути мають спільну вершину й спільну сторону, то такі кути суміжні.

Г. Якщо два кути між собою рівні, то й вертикальні до них кути рівні між собою.

Д. Відношення градусних мір кутів, що утворилися при перетині двох прямих, може дорівнювати 2 : 5 : 5 : 6.

Завдання 2 і 3 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДИН є правильним. Оберіть правильний, на вашу думку, варіант відповіді.

2. (1 б). Знайдіть градусну міру кута, якщо суміжний з ним кут дорівнює 24°.

А	Б	В	Г	Д
166°	154°	156°	128°	66°

3. (1 б.) При перетині двох прямих утворилося чотири кути, один з яких дорівнює 20°. Знайдіть усі інші кути.

А	Б	В	Г	Д
20°, 160°, 20°	60°, 120°, 60°	160°, 20°, 160°	70°, 20°, 70°	інша відповідь

До завдань 4 і 5 треба записати відповідь (за потреби виконати малюнок).

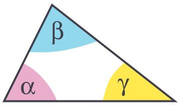
4. (1 б.) Знайдіть градусні міри суміжних кутів, якщо один з них на 120° менший від другого.

Для допитливих

Символ «⊥», який ми вживаємо для позначення перпендикулярності, ввів 1634 року французький математик і астроном П'єр Еріґон. Того самого року він запропонував вживати символ «<» для позначення кута. Сучасного ж вигляду символу кута надав англійський математик Уїльям Оутред у 1657 році. Саме з того часу кути позначають символом «∠».

§ 15. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

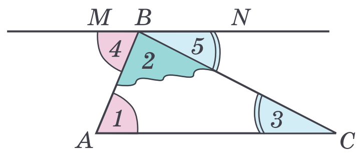


$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Теорема 1. **Сума кутів трикутника дорівнює 180°.**

Доведення

Нехай дано трикутник ABC (мал. 78). Доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.



Мал. 78

1) Проведемо через вершину B пряму MN так, що $MN \parallel AC$.

2) $\angle MBN$ – розгорнутий, тоді $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$.

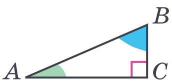
3) Оскільки $MN \parallel AC$, то:

$\angle 1 = \angle 4$ – як внутрішні різносторонні при січній AB;

$\angle 3 = \angle 5$ – як внутрішні різносторонні при січній BC.

4) Маємо: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$.

Теорему доведено.



$\angle C = 90°$

$\downarrow$

$\angle A + \angle B = 90°$

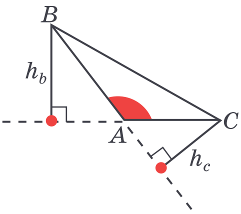
Зазначимо, що тоді **в будь-якому прямокутному трикутнику сума гострих кутів дорівнює 90°.**

Доведемо, спираючися на теорему 1, уже знайомий вам з практики факт.

Обидві висоти тупокутного трикутника, які проведено до тих його сторін, що утворюють тупий кут, лежать поза цим трикутником.

Доведемо від супротивного.

Нехай у трикутнику ABC $\angle A$ – тупий (мал. 79). Припустимо, що висота BK міститься всередині трикутника. Тоді у трикутнику ABK $\angle BAK + \angle BKA > 180°$, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.



$\angle A > 90°$

$\downarrow$

h_c і h_b поза $\triangle ABC$

Для допитливих

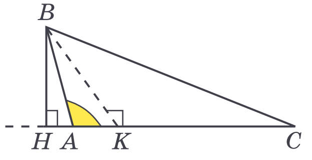
1. Плиточки, що мають форму рівних між собою рівносторонніх трикутників, викладають на площині так, що одна з вершин у них спільна, а сторони двох сусідніх збігаються. Чи можна скласти в такий спосіб «розетку» без зазорів? Якщо можна, то скільки плиточок для цього треба взяти? Знайдіть градусну міру кута, який утворено двома сусідніми відрізками зовнішньої межі «розетки».
2. Нехай тепер плиточки мають форму рівних між собою прямокутних трикутників. Складіть задачу, аналогічну до попередньої, і розв'яжіть її.

Отже, наше припущення є хибним, тому висота BH лежить поза трикутником ABC.

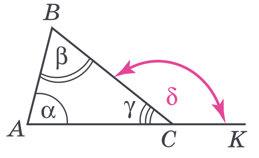
ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА

Кут, суміжний з кутом трикутника, називають його зовнішнім кутом.

Наприклад, на малюнку 80 зовнішнім кутом трикутника ABC при вершині C є кут δ.



Мал. 79



Мал. 80

Т е о р е м а 2. **Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним.**

Д о в е д е н н я

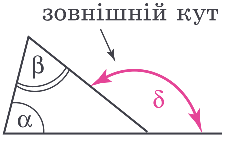
Нехай дано $\triangle ABC$ (мал. 80). Доведемо, що

$$\delta = \alpha + \beta.$$

1) Кути γ і δ – суміжні, тоді $\gamma + \delta = 180°$.

2) За теоремою про суму кутів трикутника:
$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \delta + \gamma$, тоді $\delta = \alpha + \beta$.

Теорему доведено.



$\delta = \alpha + \beta$
$\delta > \alpha$ і $\delta > \beta$

Н а с л і д о к . **Зовнішній кут трикутника більший за кожний з внутрішніх кутів цього трикутника, з ним не суміжних.**

Кожний з доданків завжди менший від їх суми. Дійсно, оскільки $\delta = \alpha + \beta$, то $\delta > \alpha$ і $\delta > \beta$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. **У будь-якому трикутнику принаймні два кути є гострими.**

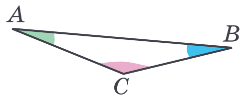
Д о в е д е н н я

Доведемо від супротивного.

Нехай у деякому трикутнику два кути не є гострими. Тоді їх сума буде не меншою від 180° і сума всіх кутів цього трикутника перевищить 180°, що суперечитиме теоремі про суму кутів трикутника.

Отже, наше припущення хибне, тому в будь-якому трикутнику є принаймні два гострих кути.

Щ. в. д.



$\angle C > 90°$
$\downarrow$
$\angle A < 90°$
і $\angle B < 90°$

Зауважимо, що побудова дещо спрощується, якщо на сторонах кута A відрізки AB і AC мають однакову довжину.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Наведені далі приклади можна розглядати як опорні задачі побудови, тобто в запису більш складних задач можливе посилання на них без деталізації кроків відповідної побудови.

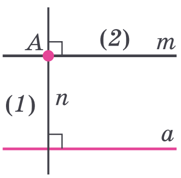
0.3 П р и к л а д 1. **Побудуйте пряму, що проходить через задану точку, паралельно даній прямій.**

Нехай дано пряму a і точку A поза нею. Проведемо через точку A пряму m таку, що $m \parallel a$.

А н а л і з

Якщо б ми мали такі паралельні прямі, то пряма, проведена перпендикулярно до однієї з них, була б перпендикулярною і до іншої.

П л а н п о б у д о в и



1) Через точку A проведемо пряму n, $n \perp a$.
2) Через точку A проведемо пряму m, $m \perp n$.
Пряма m – *шукана*.

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: $m \perp n$ і $a \perp n$. Тоді $m \parallel a$.
Щ. в. д.

0.3 П р и к л а д 2. **Знайдіть центр даного кола.**

Треба за допомогою геометричних побудов визначити положення центра даного кола.

Нехай дано коло, положення центра якого нам невідомо. Позначимо дане коло через γ.

А н а л і з

Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

Для допитливих

Зауважимо, що розв'язування задачі на побудову нагадує життєву задачу побудови будинку.

А н а л і з. Спочатку приходить архітектор і малює ескіз (наближене зображення) будівлі, яка добре вписалася б у місцевість, якби була побудованою.

П л а н п о б у д о в и. Архітектор розробляє детальний план будівництва.

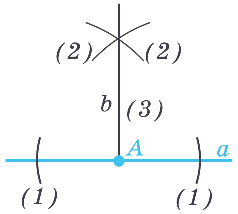
Д о в е д е н н я. Приходить комісія і перевіряє, чи відповідає споруда вимогам, які до неї висували.

План побудови можна уявити як «інструкцію для будівельника», який розуміється на опорних задачах побудови.

ПОВТОРЮЄМО ОПОРНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

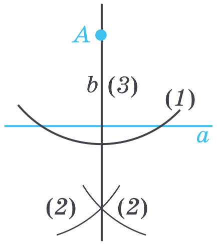
1

$b \perp a$
$A \in a$



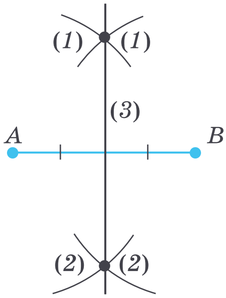
2

$b \perp a$
$A \notin a$



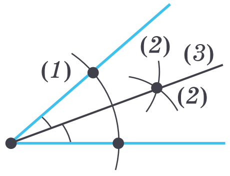
3

$[AB] \to [AB] : 2$



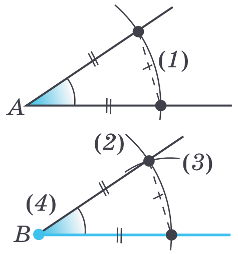
4

$\angle A \to \angle A : 2$



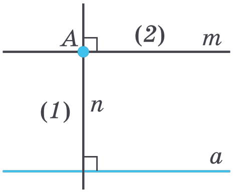
5

$\angle A \to \angle B = \angle A$



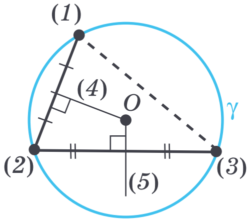
6

$m \parallel a$ через $A \notin a$



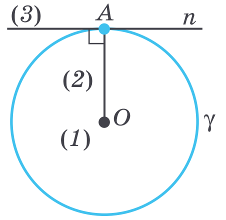
7

$\gamma \to$ т. O – центр γ



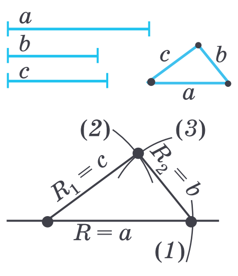
8

n – дотична до γ у точці A

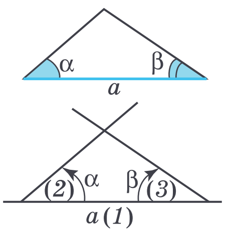


Базові трикутники

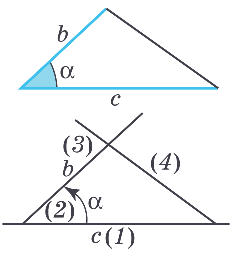
9



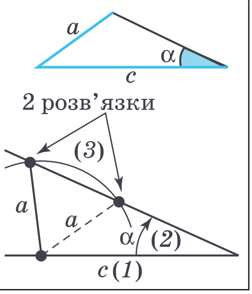
10



11

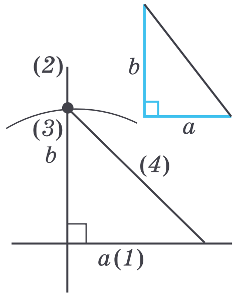


12

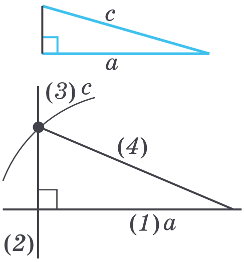


Базові прямокутні трикутники

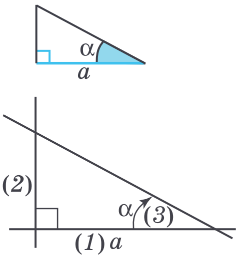
13



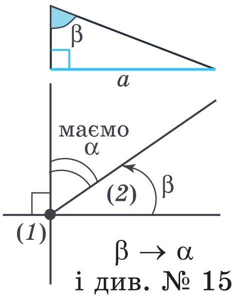
14



15



16



ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Недостатньо мати хороший розум.
Головне – уміти його використовувати.
Рене Декарт

Дві третини задач подано в тестовій формі, що дозволить вам швидко отримати інформацію про рівень засвоєння відповідних тем курсу. Табличка відповідей, наведена в розділі «Відповіді і поради», допоможе з'ясувати правильність розв'язання завдань.

У завданнях 1–22 треба обрати з пропонованих відповідей ОДНУ, яка, на вашу думку, є правильною.

1. Укажіть, скільки з наведених нижче тверджень є правильними.
1) Точкою, за означенням, є круг дуже малого радіуса.
2) Аксіоми планіметрії – це математичні твердження, які довів Евклід.
3) Якщо два промені мають спільний початок, то вони обмежують розгорнутий кут.
4) Через дві точки можна провести безліч променів, але тільки одну пряму.
5) Якщо два промені належать одній прямій, то вони обмежують розгорнутий кут.

А	Б	В	Г	Д
Чотири	Три	Два	Одне	Жодного

2. Знайдіть серед наведених тверджень теорему.
А. Точка не має ані довжини, ані ширини, її форму не можна визначити.
Б. Кутом називається частина площини, обмежена двома променями, що виходять з однієї точки.
В. Два трикутники рівні, якщо їх можна сумістити накладанням.
Г. Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.
Д. Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної.

3. На прямій послідовно розміщено точки: A, B, C і M. Відстань між серединами відрізків AB і BC дорівнює 5 см, а між серединами відрізків BC і CM – 6 см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і CM.

А	Б	В	Г	Д
Не можна визначити	22 см	16 см	11 см	Інша відповідь

4. Прямий кут поділено на три частини, градусні міри яких відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть градусні міри цих частин.

А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	10°, 15°, 20°	20°, 30°, 40°	18°, 27°, 55°	10°, 30°, 40°

VI
ЦІКАВІ ДОДАТКИ

Цей розділ – додатковий. Його призначено для тих, хто бажає більше дізнатися про геометрію та її практичне застосування. Ви дізнаєтеся про історію виникнення одиниць вимірювання довжини і часу, ознайомитеся із золотим перерізом, дізнаєтеся, що паралельні прямі можуть перетинатися і «побігаєте» за черепахою разом з Ахіллесом.

Додаток 1

Як шукали одиниці вимірювання довжини

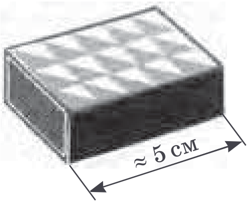
Нашим далеким предкам потрібно було вимірювати довжину земельних ділянок, визначати висоту кілків під час будівництва житла. У процесі виготовлення знаряддя праці також треба було вимірювати довжини. Спочатку для вимірювання довжини, як і для лічби, люди використовували руки, пальці. Наприклад, щоб виміряти довжину стріли, її порівнювали з довжиною руки від ліктя до кінчика середнього пальця. Це була стародавня одиниця довжини – *лікоть*, пізніше *аршин*. Перське «арш» означає *лікоть*. Ця одиниця вимірювання була дуже поширеною, і нею користувалися протягом тисячоліть.

1 лікоть = 6 долоней
1 долоня = 4 пальці

У Стародавньому Єгипті кілька тисячоліть одиницею довжини був лікоть. Єгиптяни встановили співвідношення між ліктем та іншими одиницями вимірювання довжини: 1 лікоть дорівнював 6 долоням, *1 долоня* містила *4 пальці*, тобто в одному лікті – 24 пальці.

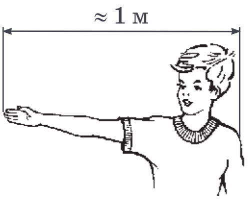
крайніх пальців, довжину і ширину одного з пальців у сантиметрах. Ці мірки допоможуть оцінити за потреби певні довжини без допомоги лінійки.

Щоб завершити нашу розмову про одиниці вимірювання довжини, наведемо співвідношення старовинних і сучасних одиниць вимірювання:



1 дюйм = 2,54 см;
1 фут = 0,3048 м;
1 ярд = 3 фути = 0,9136 м;
1 аршин = 0,711 м;
1 п'ядь = 1 аршин : 4 = 0,18 м = 18 см;
1 вершок = 1 п'ядь : 4 = 4,5 см;
1 сажень = 2,13 м;
1 косовий сажень = 2,48 м;
1 верста = 500 сажнів = 1065 м = 1,065 км;

1 морська англійська миля = 1,8532 км;
1 морська міжнародна миля = 1,852 км;
1 кабельтов = 1 морська миля : 10 = 0,18532 км;
1 атлетичний стадій = 185 м;
1 вавилонський стадій = 195 м;
1 сухопутне льє = 4,444 км;
1 морське льє = 5,556 км.



***Корисно знати*:**
ширина вашого нігтя приблизно дорівнює 1 см;
діаметр монети номіналом 1 копійка дорівнює 1,6 см;
діаметр монети номіналом 25 копійок дорівнює 2 см;
діаметр монети номіналом 5 копійок дорівнює 2,4 см;
діаметр монети номіналом 1 гривня дорівнює 2,6 см;
довжина сірника приблизно дорівнює 5 см.

Додаток 2

Одиниці вимірювання часу. Календар

Виміряти довжину просто, треба лише мати еталонну міру – палець, лікоть, лінійку тощо. А от як знайти міру для вимірювання часу? Її треба було шукати в природі. У давнину люди довго спостерігали за явищами природи, поки не збагнули, що найнадійнішою мірою для вимірювання часу є рух Сонця. Ранок, полудень, вечір, ніч – ось перші приблизні міри часу. Вони не були точними, але на той час задовольняли потреби людини, бо, глянувши на Сонце, можна було визначити, багато чи мало залишилося часу, щоб закінчити ту чи іншу роботу. Проте це можна було робити вдень. А вночі? Спостерігаючи за зорями, люди помітили, що вони також рухаються по небосхилу. Треба лише обрати певну яскраву зорю. Тоді за її положенням можна визначати, коли настає північ і чи довго ще до світанку.

1 місяць ≈ 30 діб – період між появами нового Місяця.

1 рік – 365 днів – час обертання Землі навколо Сонця.

1 доба – час повного оберту Землі навколо своєї осі.

1 година – 1/24 частина доби.

1 хвилина – 1/60 частина години.

До наших часів дійшов вислів: «Багато води збігло з того часу». Зрозуміло, що мався на увазі саме водяний годинник. Хто першим виготовив водяний годинник, невідомо, але його використовували ще в Стародавньому Єгипті.

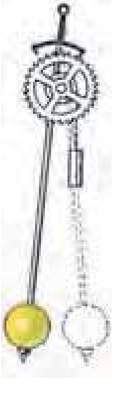
Спробуйте виготовити *водяний годинник*, це нескладно. Треба у дні бляшанки зробити невелику дірку. Під бляшанкою поставити пляшку з горизонтальними позначками (на однакових відстанях одну від одної). Потім наповнити бляшанку водою і простежити, через які інтервали часу вода у пляшці підніметься від однієї позначки до наступної. Далі зробити відповідні написи біля позначок. Ось і готовий годинник.

Пісочний годинник

Аналогічно водяному працює і *пісочний годинник* – замість води з однієї посудини до другої пересипається пісок. До цього часу в деяких лабораторіях і процедурних кабінетах користуються саме пісочними годинниками. Довгий час пісочні годинники використовували на кораблях. Коли пісок пересипався з однієї посудини в другу, вахтовий матрос перевертав годинник і ударом у дзвони сповіщав про відповідний час. Пісочні годинники були скляні, звідси й пішов вислів «пробили склянки».

У Китаї користувалися *вогняним будильником* (мал. 220). У чаші будильника повільно тлів стержень з тирси, склеєної смолою. Було відомо, скільки часу горить стержень певної довжини. На відповідній відстані від краю будильника через нього перекидали нитку з металевими кульками на кінцях. Як тільки вогонь доходив до нитки, вона перегоряла, кульки падали у підставлену до будильника чашу і створювали мелодійний дзвін.

Мал. 220. Вогняний будильник



Механічний годинник

До перших *механічних годинників* можна віднести годинник, створений Ктесібієм у I ст. до н. е. у Греції. Головною його частиною була посудина, у яку рівномірно надходила вода. Рівень її в посудині поступово підвищувався і піднімав легкий поплавець, на якому було закріплено стрілку, яка вказувала на барабан, що

СЛОВНИЧОК-ПОКАЖЧИК

Аксіома – твердження, що приймається без доведення (с. 22, 61).

Базовий трикутник – трикутник, який ми вміємо будувати (с. 162).

Бісектриса кута – промінь, який виходить з вершини кута й ділить цей кут навпіл (с. 20).

Бісектриса трикутника – відрізок бісектриси кута трикутника від його вершини до точки перетину з протилежною стороною (с. 73).

Бічна сторона рівнобедреного трикутника – одна з двох його рівних між собою сторін (с. 69).

Венна діаграма – схематичне зображення множини, запропоноване Венном (с. 12).

Вертикальні кути – два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого (с. 39).

Висота трикутника – перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону трикутника (с. 73).

Відрізок – одне з основних абстрактних понять геометрії; сформувалося з узагальнення людського досвіду; не має чіткого визначення; можна уявити, як натягнутий між двома уявними кілками шнур, що не має товщини (с. 15).

Відстань
- *між даною точкою і даною прямою* – довжина відрізка прямої, перпендикулярної до даної, від заданої точки до даної прямої (с. 43);
- *між двома паралельними між собою прямими* – довжина спільного перпендикуляра до них, з кінцями на цих прямих (с. 100);
- *між двома точками* – довжина відрізка з кінцями в цих точках (с. 28).

Властивість – твердження, яке виконується за умови належності фігури певній множині (с. 62);
– ***паралельних прямих*** (с. 58).

Геометричне місце точок (ГМТ) – множина всіх точок, які задовольняють певну умову (с. 121).

Гіпотенуза – сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута (с. 70).

Градус – міра кута, що складає $\frac{1}{180}$ частину розгорнутого кута (с. 24).

Діаметр кола – хорда, що проходить через центр кола (с. 122).

Доведення – логічне міркування, яке виявляє правдивість певного твердження (с. 12, 22).

Доведення від супротивного – спосіб доведення, коли припускається супротивне до того, що треба довести, і міркування на основі цього припущення призводять до логічного протиріччя (с. 43).

Дотична до кола – пряма, яка має одну спільну точку з колом (с. 126)
– *властивості* (с. 24);

Дотичні кола – кола, які мають одну спільну точку (с. 130).

Зовнівписане коло трикутника – коло, яке дотикається до однієї сторони трикутника і продовжень двох інших його сторін (с. 147).

Зовнішній кут трикутника – кут, суміжний з його внутрішнім кутом (с. 77).

Золотий переріз – це таке ділення цілого на дві не рівні між собою частини, при якому відношення більшої частини до цілого дорівнює відношенню меншої частини до більшої. (с. 196).

Інцентр трикутника – точка перетину його бісектрис (с. 73).

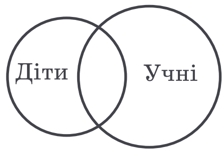
Катети – сторони прямокутного трикутника, що утворюють прямий кут (с. 70).

Коло – геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки (с. 122);

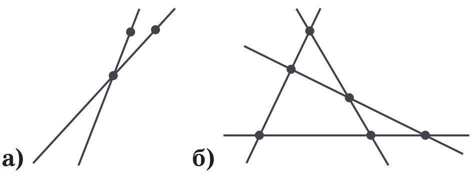
ВІДПОВІДІ Й ПОРАДИ

РОЗДІЛ I

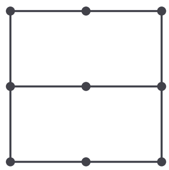
2. Складіть шнур відповідної довжини у три шари. **3.** *Порада.* Використайте розв'язання попередньої задачі. **4.** Будь-яка пряма, що проходить через точку перетину діагоналей квадрата, ділить його на дві рівні частини. **5.** *Порада.* Можна скористатися досвідом розв'язування завдання 4; можна намалювати квадрат на папері в клітинку; уважно придивитися до малюнка. **6.** *Порада.* Поділіть протилежні сторони квадрата на три рівні частини; можна скористатися зображенням квадрата на папері в клітинку; можна на одній стороні квадрата позначити дві точки на відстані 1/6 її довжини від кінців і сполучити ці точки із серединою протилежної сторони. В останній пораді ви побачите розв'язання, якщо знаєте формули для площ прямокутника і трикутника. **7.** Твердження: 1, 3–7, 9, 11, 12–16. Істинні: 1, 3, 5, 6, 9, 12. **8.** Обидва помиляються. Не всі діти школярі (є дошкільнята); не всі школярі – діти (є підлітки). Правильна діаграма на мал. В-1. **9. 1)** Так. **2)** Ні. **3)** Так. **4)** Діаграма не відповідає умові, бо не лише автомобілі «Жигулі» можуть бути синього кольору. **5)** Діаграма не відповідає умові, бо множина *P* (пиріжки з грибами і картоплею) повинна збігатися з перетином множин *M* і *D*. **6)** Діаграма не відповідає умові, бо за умовою в класі немає учнів, які б не вивчали німецьку чи англійську мову. **10. 1)** Хибне. **2)** Правильне. **3)** Хибне. **4)** Правильне. **5)** Хибне. **11.** Див. мал. В-2. **12.** Див. мал. В-3. **13. а)** Див. мал. В-4. **б)** див. мал. В-5.

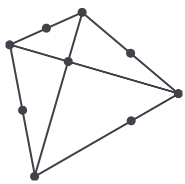


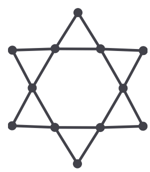
Мал. В-1



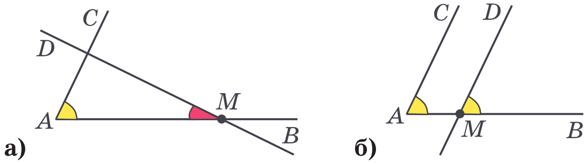
Мал. В-2


Мал. В-3

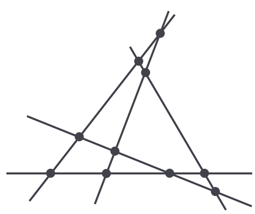

Мал. В-4

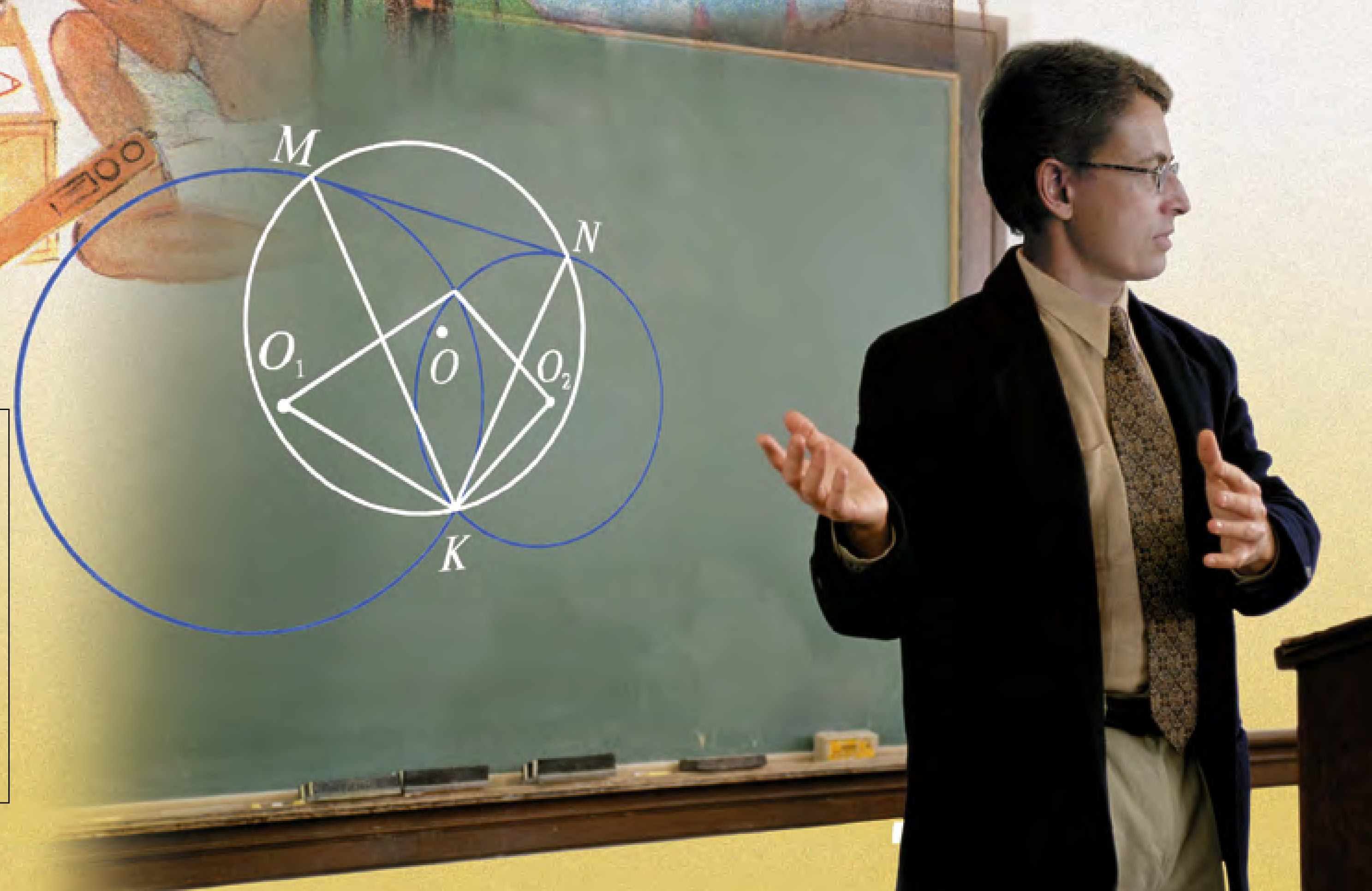

Мал. В-5

17. Ні, бо точка не має розміру. **18.** Ні. Ні. **19.** Ні, бо і на відрізку, і на прямій міститься нескінченна кількість точок, тому порівняти їх не можна. **20.** Накладанням. **21.** Накладанням. **22.** 4 (два з них розгорнуті). **23.** 6. **24. а)** 1; **б)** 3; **в)** 6. **25.** 10 (два з них – розгорнуті). **26.** Ні, наприклад, $AB = 3$ см і $CK = 3$ дм. **27.** $AB = 30$ см, а $CK = 3$ дм. **28.** Так, наприклад, 2 см < 1 м. **29. 1)** Так, якщо $MD \parallel AB$. **2)** Див. мал. В-6 (2 розв'язки). **30.** Див. мал. В-7. **31.** Якщо маємо на прямій n точок і між кожними двома позначаємо по одній точці, то матимемо $n - 1$ нових точок. Загальна кількість точок дорівнюватиме $n + (n - 1) = 2n - 1$, – число непарне, тобто щоразу останню кількість точок множимо на 2 і віднімаємо 1.



Мал. В-6

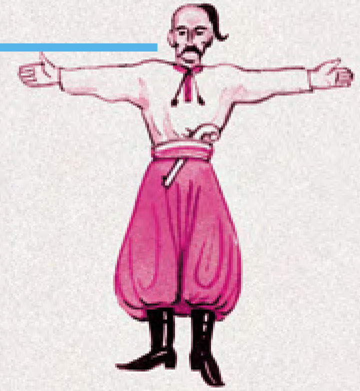

Мал. В-7



Грецька абетка

α	альфа	ι	йота	ρ	ро
β	бета	κ	каппа	σ	сигма
γ	гамма	λ	ламбда	τ	тау
δ	дельта	μ	мю	υ	іпсилон
ε	епсилон	ν	ню	φ	фі
ζ	дзета	ξ	ксі	χ	хі
η	ета	ο	омікрон	ψ	псі
θ	тета	π	пі	ω	омега

СЛОВНИК ПОЗНАЧЕНЬ



$a \parallel b$	– прямі a і b паралельні
$a \perp b$	– прямі a і b перпендикулярні
ΔABC	– трикутник ABC
$\angle A$	– кут A
$\angle(a; b); \widehat{ab}$	– кут між прямими a і b (або променями a і b)
$A \in a$	– точка A належить прямій a
$A \notin a$	– точка A не належить прямій a
$\{a, b, c\}$	– множина елементів a, b, c
$\Rightarrow$	– знак логічного слідування, «тоді випливає»
$\rightarrow$	– «тоді маємо» або «тоді будуємо»
$\equiv$	– «збігається» або «тотожна рівність»
$\triangleq$	– «позначили як»
$d(A; a)$	– відстань від точки A до прямої a
$d(b; a)$	– відстань між прямими b і a
$[AB]$	– відрізок AB
$\lvert AB \rvert$	– довжина відрізка AB
(AB)	– пряма AB
$[AB)$	– промінь AB з початком у точці A
$a \cap b = M$	– прямі a і b перетинаються в точці M
$\text{Пр}_n A$	– проекція точки A на пряму n
$\text{Пр}_n AC$	– проекція відрізка AC на пряму n
Щ.в.д.	– що й вимагалося довести

Сучасна система одиниць вимірювання довжини

1 см = 10 мм
1 дм = 10 см =100 мм
1 м = 10 дм = 100 см =1000 мм
1км = 1000 м

Деякі стародавні одиниці вимірювання довжини

1 дюйм ≈ 2,5 см
1 вершок ≈ 4,4 см
1 п’ядь ≈ 18 см
1 фут ≈ 30 см
1 аршин ≈ 71 см
1 верста ≈ 1 км 67 м
1 миля морська ≈ 1 км 852 м
1 миля географічна ≈ 7 км 420 м