

Форзац 1



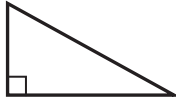
«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892 – 1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним доровказом на шляху до професіоналізму.

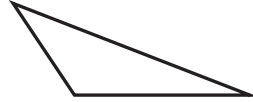
Формац 2



Гострокутний
трикутник



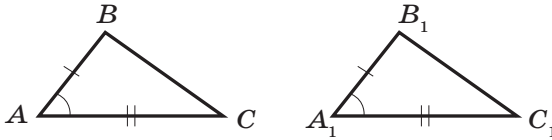
Прямокутний
трикутник



Тупокутний
трикутник

ПЕРША ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

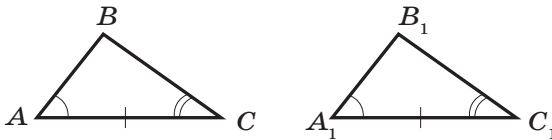
за двома сторонами та кутом між ними



Якщо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

ДРУГА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

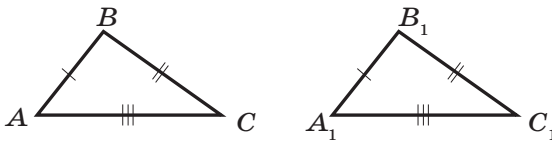
за стороною та двома прилеглими до неї кутами



Якщо $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

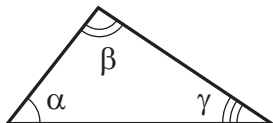
ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

за трьома сторонами



Якщо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Геометрія

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.

«Геометрія»
підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2015. — 224 с. : іл.

ISBN 978-966-474-000-0.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-474-000-0

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,
М. С. Якір, 2015
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,
художнє оформлення, 2015

ВІД АВТОРІВ

УЧНЯМ

Любі семикласники!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **геометрію**. Зверніть увагу, що слова «**гео**графія» та «**гео**метрія» мають однакову частину — «гео», що в перекладі з грецької означає «земля». Проте якщо на уроках географії в 6 класі ви дійсно займалися землеописом («графія» грецькою — «опис»), то на уроках геометрії вам не доведеться займатися землемірянням («метрео» грецькою — «міряти»).

Геометрія — одна з найдавніших наук. Її назву можна пояснити тим, що зародження та розвиток геометрії були тісно пов'язані з різноманітною практичною діяльністю людини: розмічанням меж земельних ділянок, будівництвом шляхів, зрошувальних каналів та інших споруд, тобто геометрія, як говорять у таких випадках, була *прикладною наукою*. Поступово, крок за кроком людство накопичувало знання, і геометрія перетворилася на красиву та досконалу, строгу та послідовну математичну теорію. Знайомитися із цією наукою та вчитися застосовувати набуті знання на практиці ви й будете на уроках геометрії.

Знати геометрію надзвичайно важливо. Дійсно, подивіться навкруги — усюди геометрія, точніше, **геометричні фігури**: відрізки, трикутники, прямокутники, прямокутні паралелепіпеди, кулі тощо.

*a**б*

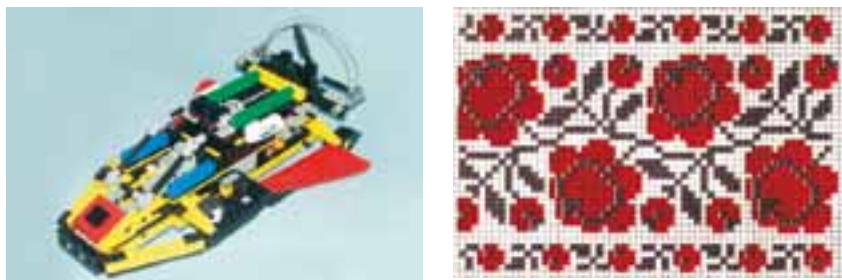
Рис. 1. Архітектурні споруди:
a — готель «Салют» (м. Київ);
б — адміністративна будівля (м. Лондон)

Рис. 2. Сирецька
 телевізійна вежа
 (м. Київ)

Без глибоких геометричних знань не могли з'явитися складні будівельні конструкції (рис. 1, 2), кораблі та літаки (рис. 3) і навіть деталі дитячого конструктора та узорі вишиванок (рис. 4). Створення узорів потребує від майстрині мати уявлення про такі геометричні поняття, як симетрія та паралельне перенесення. Не знаючи геометрії, неможливо стати хорошим інженером-конструктором, токарем, столяром, ученим, архітектором, дизайнером, модельєром, спеціалістом з комп'ютерної графіки тощо. Узагалі, знання з геометрії — важлива складова людської культури.

*a**б*

Рис. 3. Машинобудівні конструкції:
a — корабель на стапелях Миколаївського суднобудівного заводу;
б — літак Ан-225 («Мрія»)



а

б

Рис. 4. Геометрія в повсякденності:

а — дитячий конструктор; б — узор вишиванки

Геометрія — дуже цікавий предмет. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся з його структурою.

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, *жирним курсивом* і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати цікаві оповідання з історії геометрії.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

УЧИТЕЛЯМ

Шановні колеги!

У навчальній програмі з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів зазначено таке: «Зміст навчального матеріалу структуровано за темами відповідних навчальних курсів із визначенням кількості годин на їх вивчення. Такий розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителів та авторам підручників надається право коригувати його залежно від прийнятої методичної концепції...».

Зважаючи на наведене, ми визнали за доцільне в другому параграфі підручника розглянути тему «Трикутники». Це дає змогу істотно урізноманітнити дидактичний матеріал параграфу «Паралельні прямі».

Зрозуміло, що в межах загальноосвітньої школи неможливо реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії: покласти в основу систему аксіом, а далі будувати викладення дедуктивно, тобто доводити теореми логічно строго, базуючись на аксіомах і раніше доведених фактах. Це можна пояснити тим, що кількість учнів (особливо семикласників), схильних до дедуктивного мислення, обмежена. Насправді більшості притаманний наочно-образний тип мислення. Тому для дитини апеляція до наочної очевидності є цілком природною та виправданою.

На підставі викладеного, в основу цього підручника покладено **наочно-дедуктивний принцип у поєднанні із частковою аксіоматизацією**.

Ми вважаємо, що мета вивчення геометрії в школі — це не тільки розвиток логічного мислення та вміння проводити доведення. Автори підручника ставлять ширшу мету: уточнити уявлення учнів про елементарні геометричні об'єкти (точка, пряма, промінь, відрізок, кут), ознайомити їх з найважливішими властивостями базових фігур елементарної геометрії (трикутник, коло, чотирикутник тощо), розвинути в них потребу в доведенні, тобто закласти основи дедуктивного й евристичного мислення, а головне — **навчити учнів застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язування практичних і теоретичних задач**. Ми сподіваємося, що ви оціните цей підручник як такий, що допоможе в реалізації зазначених цілей.








У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Зеленим кольором позначено номери задач, які рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Тож перетворімо разом шкільний курс геометрії в зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

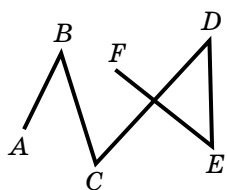
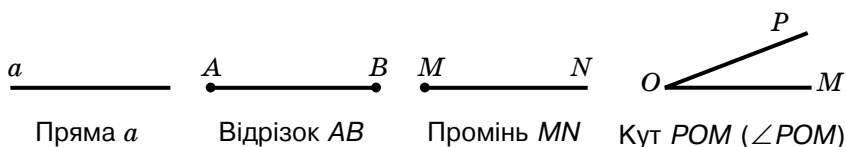
- n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
- n завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- n^{\bullet} завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n^* задачі для математичних гуртків і факультативів;
-  ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;
-  доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
-  доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
-  доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;
-  закінчення доведення теореми;
-  закінчення розв'язання задачі;
-  рубрика «Коли зроблено уроки».

Рівні відрізки на кресленнях позначено однаковою кількістю штрихів, рівні кути — однаковою кількістю дуг, за винятком відрізків і кутів, які треба знайти.

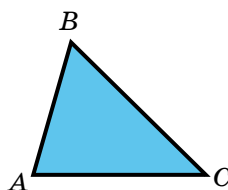
ВСТУП

Що вивчає геометрія?

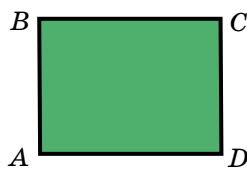
Хоча геометрія — це новий для вас шкільний предмет, проте на уроках математики ви вже ознайомилися з азами цієї мудрої науки. Так, усі геометричні фігури, зображені на рисунку 5, вам добре відомі.



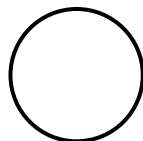
Ламана $ABCDEF$



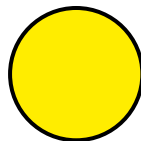
Трикутник ABC



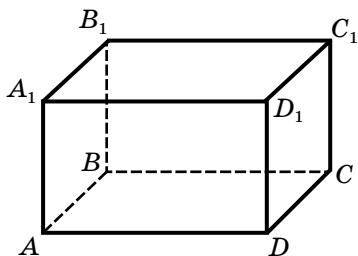
Прямокутник $ABCD$



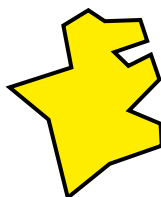
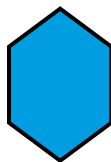
Коло



Круг



Прямокутний паралелепіпед
 $ABCD, A_1B_1C_1D_1$



Многокутники

Рис. 5

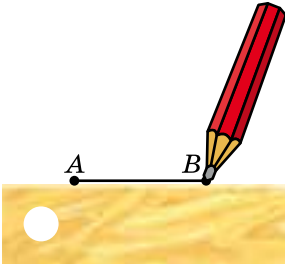


Рис. 6



Рис. 7

Ви вмієте за допомогою лінійки сполучати дві точки відрізком (рис. 6), за допомогою циркуля будувати коло (рис. 7), за допомогою лінійки й косинця будувати перпендикулярні та паралельні прямі (рис. 8), вимірювати довжину відрізка й будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки з міліметровими поділками (рис. 9), знаходити величину кута й будувати кут заданої величини за допомогою транспортира (рис. 10), класифікувати трикутники (див. форзац).



Рис. 8

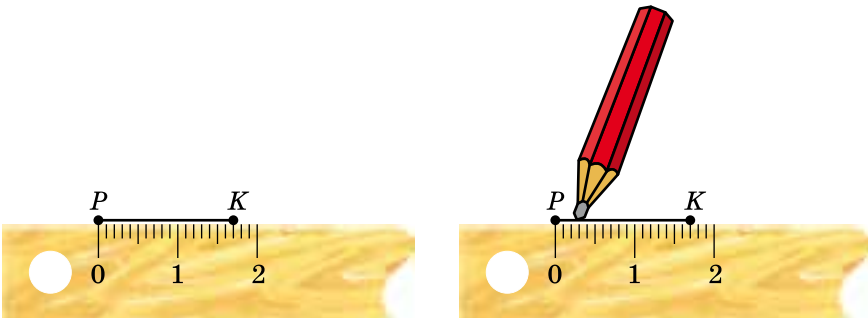


Рис. 9

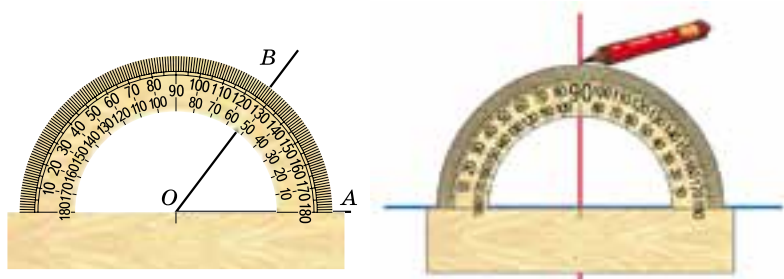


Рис. 10

Однак знати, який «вигляд» має фігура, або вміти виконувати прості побудови — це лише початкові знання *науки про властивості геометричних фігур*, тобто *геометрії*.

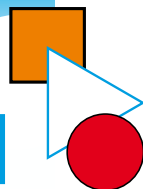
Під час вивчення *систематичного курсу* геометрії ви поступово, у певній послідовності вивчатимете властивості геометричних фігур, а отже, і самі фігури, як уже знайомі вам, так і нові. Це означає, що ви маєте навчитися за одними властивостями фігури встановлювати та, головне, **доводити** інші її властивості.

Шкільний курс геометрії традиційно поділяють на **планіметрію** та **стереометрію**. Планіметрія вивчає фігури на площині («планум» у перекладі з латинської — «площина»), стереометрія — фігури в просторі («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Отже, ми приступаємо до вивчення планіметрії.

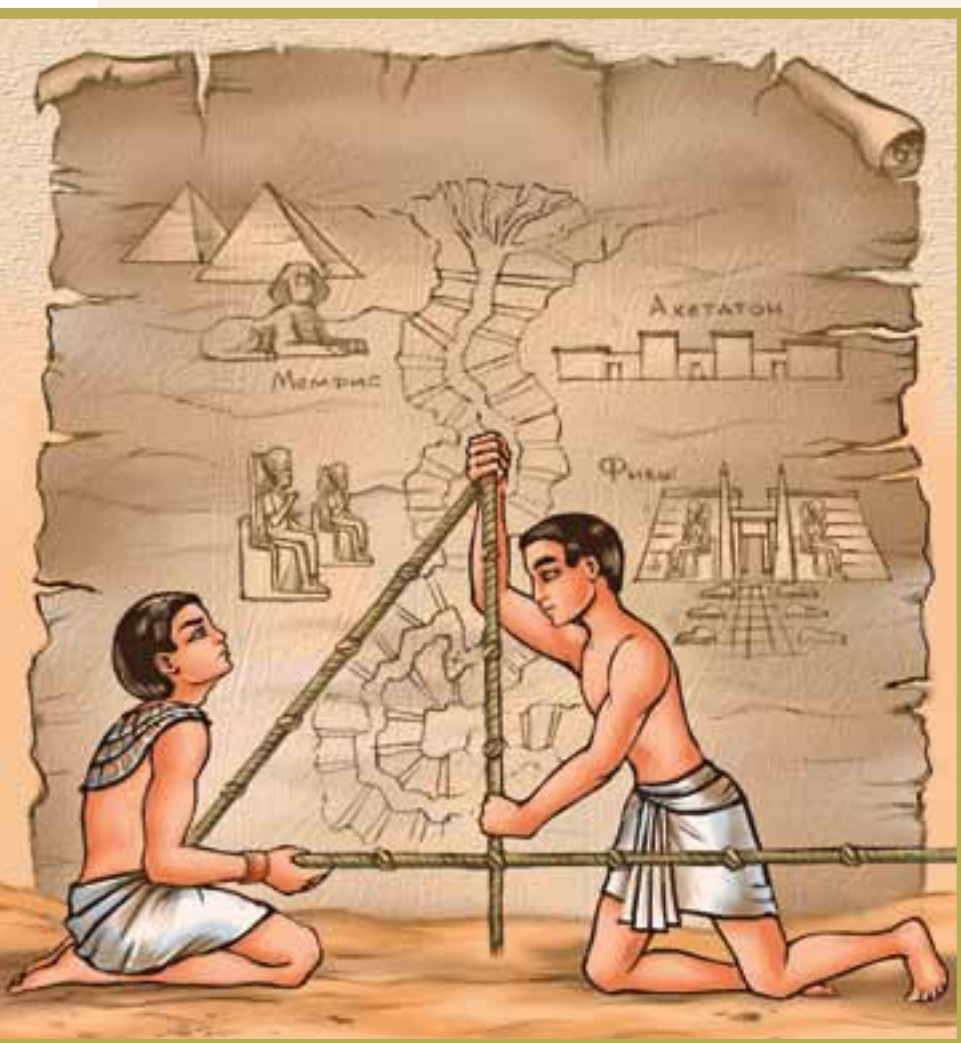
НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

§ 1



У цьому параграфі розглядаються знайомі вам з попередніх класів геометричні фігури, а саме: точки, прямі, відрізки, промені й кути.

Ви дізнаєтеся більше про властивості цих фігур. Деякі із цих властивостей навчитеся **доводити**. Слова **означення**, **теорема**, **аксіома** стануть для вас звичними, зрозумілими та часто вживаними.





1. Точки та прямі

Точка — найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини. Наприклад, кожна з фігур, зображених на рисунку 11, розбита на частини. І навіть про фігуру, зображену на рисунку 12, яка складається з двох точок, можна сказати, що вона складається з двох частин: точки A й точки B .

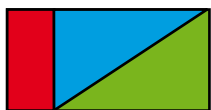


Рис. 11

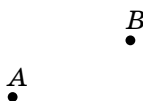


Рис. 12

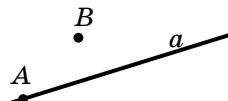


Рис. 13

На рисунку 13 зображено пряму a та дві точки A і B . Говорять, що *точка A належить прямій a* , або *точка A лежить на прямій a* , або *пряма a проходить через точку A* , і, відповідно, *точка B не належить прямій a* , або *точка B не лежить на прямій a* , або *пряма a не проходить через точку B* .

Пряма — це геометрична фігура, яка має певні властивості.

Основна властивість прямої. Через будь-які дві точки¹ можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Чому цю властивість прямої вважають основною?

Нехай про деяку лінію відомо лише те, що вона проходить через точки A і B . Для того щоб скласти уявлення про цю фігуру, такої інформації явно бракує. Адже через точки A і B можна провести багато різних *ліній* (рис. 14). Пряма ж задається цими точками однозначно. У цьому й полягає суть основної властивості прямої.

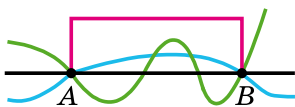
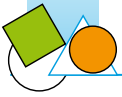


Рис. 14

Ця властивість дозволяє позначати пряму, називаючи дві будь-які її точки. Так, пряму, проведену через точки M і N , називають «пряма MN » (або «пряма NM »).

¹ Тут і далі, говорячи «дві точки», «три точки», «дві прямі» тощо, вважатимемо, що це різні точки й різні прямі. Випадок їх суміщення будемо обумовлювати окремо.



Основну властивість геометричної фігури ще називають аксіомою (докладніше про аксіоми ви дізнаєтеся в п. 6).

Якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміна), то використовують **означення**. Наприклад:

- 1) годинником називають прилад для вимірювання часу;
- 2) геометрія — це розділ математики, який вивчає властивості фігур.

Означення використовують і в геометрії.

Означення. Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що **перетинаються**.

На рисунку 15 зображено прямі a і b , які перетинаються в точці O .

Часто справедливість (істинність) якого-небудь факту встановлюють за допомогою *логічних міркувань*.

Розглянемо таку задачу. Відомо, що всі мешканці Геометричної вулиці — математики. Євген живе за адресою вул. Геометрична, 5. Чи є Євген математиком?

За умовою задачі Євген живе на Геометричній вулиці. А оскільки всі мешканці цієї вулиці математики, то Євген — математик.

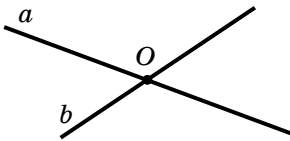


Рис. 15

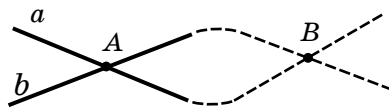


Рис. 16

Наведені логічні міркування називають **доведенням** того факту, що Євген — математик.

У математиці твердження, істинність якого встановлюють за допомогою доведення, називають **теоремою**.

Теорема 1.1. *Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.*

Доведення. \odot Нехай прямі a і b , що перетинаються, крім спільної точки A , мають ще одну спільну точку B (рис. 16). Тоді через дві точки A і B проходять дві прямі.



А це суперечить основній властивості прямої. Отже, припущення про існування другої точки перетину прямих a і b неправильне. ▲

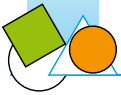


1. Яку фігуру не можна розбити на частини?
2. Сформулюйте основну властивість прямої.
3. Яка властивість прямої дозволяє позначати її, називаючи будь-які дві точки прямої?
4. Для чого використовують означення?
5. Які дві прями називають такими, що перетинаються?
6. Як називають твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення?
7. Сформулюйте теорему про дві прями, що перетинаються.

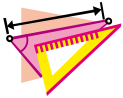


ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 1.° Проведіть пряму, позначте її буквою m . Позначте точки A і B , які лежать на цій прямій, і точки C , D , E , які не лежать на ній.
- 2.° Позначте точки M і K та проведіть через них пряму. Позначте на цій прямій точку E . Запишіть усі можливі позначення отриманої прямої.
- 3.° Проведіть прями a і b так, щоб вони перетиналися. Позначте точку їхнього перетину буквою C . Чи належить точка C прямій a ? прямій b ?
- 4.° Позначте три точки так, щоб вони не лежали на одній прямій, і через кожен пару точок проведіть пряму. Скільки утворилося прямих?
- 5.° Позначте чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій.
- 6.° Проведіть три прями так, щоб кожні дві з них перетиналися. Позначте точки перетину цих прямих. Скільки можна отримати точок перетину?



7. Позначте чотири точки так, щоб при проведенні прямої через кожні дві з них на рисунку: 1) утворилася одна пряма; 2) утворилися чотири прямі; 3) утворилися шість прямих. Проведіть ці прямі.

**ВПРАВИ**

- 8.° Користуючись рисунком 17:

- 1) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a ; прямій MK ;
- 2) укажіть усі позначені точки, які не належать прямій a ; прямій MK ;
- 3) визначте, чи перетинаються прямі a і MK ;
- 4) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a , але не належать прямій MK .

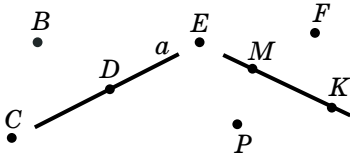


Рис. 17

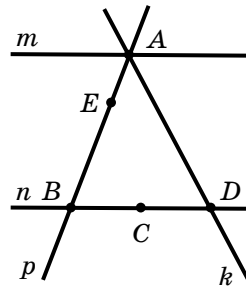
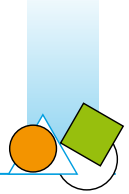


Рис. 18

- 9.° Користуючись рисунком 18, укажіть:

- 1) які з позначених точок належать прямій p , а які не належать їй;
- 2) яким прямим належить точка A ; точка B ; точка C ; точка D ; точка E ;
- 3) які прямі проходять через точку C ; точку B ; точку A ;
- 4) у якій точці перетинаються прямі k і p ; прямі m і k ;
- 5) у якій точці перетинаються три із чотирьох зображених на рисунку прямих.



- 10.*** Точка C належить прямій AB . Чи є різними прямі AB і AC ? Відповідь обґрунтуйте.
- 11.*** Провели чотири прямі, кожна дві з яких перетинаються, причому через кожну точку перетину проходять тільки дві прямі. Скільки точок перетину при цьому утворилося?
- 12.**** Як треба розташувати шість точок, щоб вони визначали шість прямих?
- 13.**** Дану пряму перетинають чотири прямі. Скільки може утворитися точок перетину цих прямих з даною?
- 14.**** Провели чотири прямі, кожна дві з яких перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися?
- 15.**** Провели п'ять прямих, кожна дві з яких перетинаються. Яка найменша можлива кількість точок перетину цих прямих? Яка найбільша кількість точок перетину може утворитися?
- 16.*** Чи можна провести шість прямих і позначити на них 11 точок так, щоб на кожній прямій було позначено рівно чотири точки?
- 17.*** На площині проведено три прямі. На першій прямій позначили п'ять точок, на другій — сім точок, а на третій — три точки. Яка найменша кількість точок може бути позначена?
- 18.*** Чи можна позначити кілька точок і провести кілька прямих так, щоб на кожній прямій лежало рівно три позначені точки й через кожну точку проходило рівно три з проведених прямих?



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

- 19.** Складіть квадрат із кількох фігур, кожна з яких дорівнює фігурі, зображеній на рисунку 19.

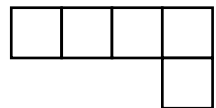
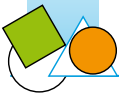


Рис. 19



2. Відрізок і його довжина

На рисунку 20 зображено пряму a , яка проходить через точки A і B . Ці точки обмежують частину прямої a , яку виділено червоним кольором. Таку частину прямої разом з точками A і B називають **відрізком**, а точки A і B — **кінцями** цього відрізка.

Для будь-яких двох точок існує *єдиний* відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто *відрізок своїми кінцями задається однозначно*. Тому відрізок позначають, називаючи його кінці. Наприклад, відрізок, зображений на рисунку 21, позначають так: MN або NM (читають: «відрізок MN » або «відрізок NM »).

На рисунку 22 зображено відрізок AB і точку X , яка належить цьому відрізку, проте не збігається із жодним його кінцем. Точку X називають **внутрішньою** точкою відрізка AB . У такому випадку також говорять, що точка X **лежить між** точками A і B .



Рис. 20



Рис. 21

Таким чином, відрізок AB складається з точок A і B , а також усіх точок прямої AB , які лежать між точками A і B .

Означення. Два відрізки називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 23 зображено рівні відрізки AB і CD . Пишуть: $AB = CD$.



Рис. 22

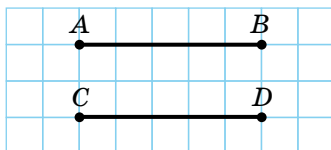


Рис. 23

Ви знаєте, що кожний відрізок має певну довжину й для її вимірювання треба вибрати **одичний відрізок**. За одичний можна взяти будь-який відрізок.

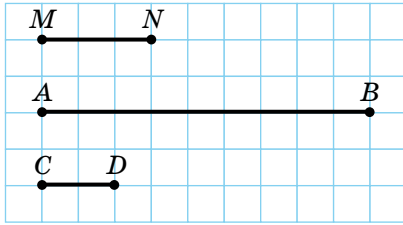
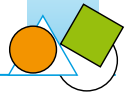


Рис. 24



Рис. 25

Наприклад, вважатимемо відрізок MN на рисунку 24 одиничним. Цей факт записують так: $MN = 1$ од. Тоді вважають, що довжина відрізка AB дорівнює трьом **одиницям довжини**, і записують: $AB = 3$ од. Також уживають запис $AB = 3$, його читають: «відрізок AB дорівнює трьом». Для відрізка CD маємо: $CD = \frac{2}{3}$.

На практиці найчастіше використовують такі одиничні відрізки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Залежно від вибору одиниці довжини змінюється **числове значення довжини** відрізка. Наприклад, на рисунку 25 маємо: $AB = 17$ мм, або $AB = 1,7$ см, або $AB = 0,17$ дм тощо.

У виробництві та в побуті використовують різноманітні прилади для вимірювання довжини відрізка (рис. 26, $a-r$): лінійку з поділками (a), рулетку (b), штангенциркуль ($в$), мікрометр ($г$), польовий циркуль (r).

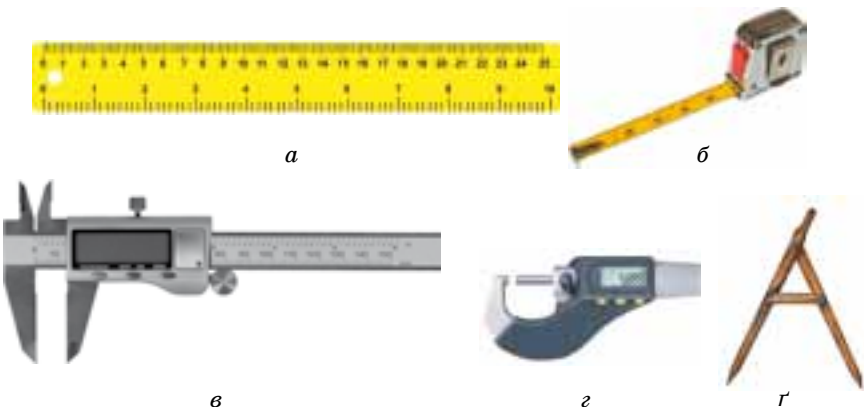


Рис. 26



Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Якщо довжина відрізка AB більша за довжину відрізка MN , як, наприклад, на рисунку 24, то говорять, що відрізок AB більший за відрізок MN , і записують: $AB > MN$. Також можна сказати, що відрізок MN менший від відрізка AB , і записати: $MN < AB$.

Надалі, говорячи «сума відрізків», матимемо на увазі суму довжин цих відрізків.

Основна властивість довжини відрізка. Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB , то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB (рис. 27), тобто

$$AB = AC + CB.$$

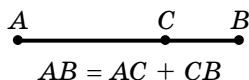


Рис. 27

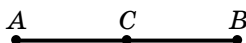


Рис. 28



Рис. 29

Означення. Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB . Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

Означення. Серединою відрізка AB називають таку його точку C , що $AC = CB$.

На рисунку 28 точка C — середина відрізка AB .

Задача. Точки A , B і C належать одній прямій, $AB = 8$ см, відрізок AC на 2 см довший за відрізок BC . Знайдіть відрізки¹ AC і BC .

Розв'язання. В умові не вказано, яким є взаємне розміщення даних точок на прямій. Тому розглянемо три можливих випадки.

1) Точка B — внутрішня точка відрізка AC (рис. 29). Тоді відрізок AC довший за відрізок BC на довжину відрізка AB , тобто на 8 см. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

¹ Часто замість «Знайдіть довжину відрізка...» говорять: «Знайдіть відрізок...».



2) Точка C — внутрішня точка відрізка AB (рис. 30). У цьому випадку $AC + BC = AB$. Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = (x+2)$ см. Маємо:

$$x + 2 + x = 8;$$

$$x = 3.$$

Отже, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.



Рис. 30



Рис. 31

3) Точка A — внутрішня точка відрізка BC (рис. 31). У цьому випадку $AB + AC = BC$ і тоді $AC < BC$. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

Відповідь: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см.



1. Скільки існує відрізків, кінцями яких є дві дані точки?
2. З яких точок складається відрізок AB ?
3. Які два відрізки називають рівними?
4. Чи можна будь-який відрізок узяти за одиничний?
5. Що можна сказати про довжини рівних відрізків?
6. Що можна сказати про відрізки, які мають рівні довжини?
7. Сформулюйте основну властивість довжини відрізка.
8. Що називають відстанню між двома точками?
9. Чому дорівнює відстань між двома точками, що збігаються?
10. Яку точку називають серединою відрізка AB ?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

20.^о Позначте дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте точки C , D і E , які належать відріжку AB , і точки F , M і K , які не належать відріжку AB , але належать прямій AB .



- 21.° Проведіть пряму та позначте на ній три точки. Скільки утворилося відрізків?
- 22.° Позначте на прямій точки A , B , C і D так, щоб точка C лежала між точками A і B , а точка D — між точками B і C .
- 23.° Позначте на прямій точки A , B і C так, щоб виконувалася рівність $AC = AB + BC$.

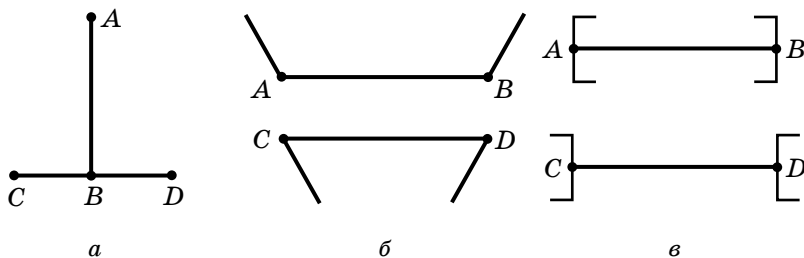


Рис. 32

- 24.° Порівняйте на око відрізки AB і CD (рис. 32). Перевірте свій висновок вимірюванням.
- 25.° Порівняйте на око відрізки AB і BC (рис. 33). Перевірте свій висновок вимірюванням.

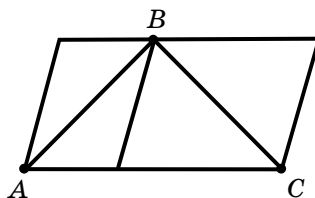
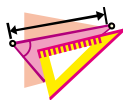


Рис. 33



ВПРАВИ

- 26.° Назвіть усі відрізки, які зображено на рисунку 34.

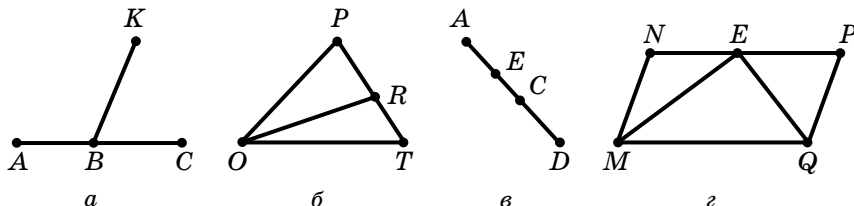


Рис. 34



- 27.° Знайдіть довжину кожного з відрізків, зображених на рисунку 35, якщо одиничний відрізок дорівнює відрізку: 1) AB ; 2) MN .

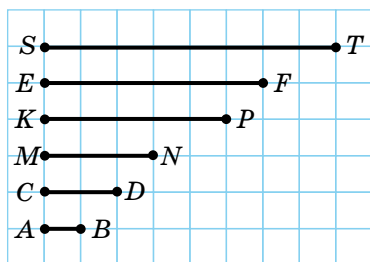


Рис. 35

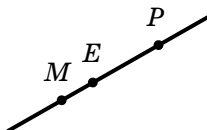


Рис. 36

- 28.° Яка з точок, позначених на рисунку 36, лежить між двома іншими? Запишіть відповідну рівність, що випливає з основної властивості довжини відрізка.
- 29.° Між якими точками лежить точка B (рис. 37)? Для кожного випадку запишіть відповідну рівність, яка випливає з основної властивості довжини відрізка.
- 30.° Точка D — внутрішня точка відрізка ME . Знайдіть:
- відстань між точками M і E , якщо $MD = 1,8$ дм, $DE = 2,6$ дм;
 - довжину відрізка MD , якщо $ME = 42$ мм, $DE = 1,5$ см.

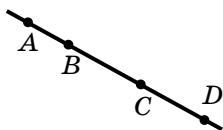
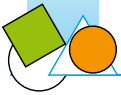


Рис. 37



Рис. 38

- 31.° Точки A , B і C лежать на одній прямій (рис. 38). Які з наведених тверджень правильні:
- $AB + BC = AC$;
 - $AC + AB = BC$?
- 32.° Точка K є серединою відрізка MN . Чи можна сумістити накладанням: 1) відрізки MK і KN ; 2) відрізки MK і MN ?



- 33.° Точка K — середина відрізка MN , точка E — середина відрізка KN , $EN = 5$ см. Знайдіть відрізки MK , ME і MN .
- 34.° Точка C — внутрішня точка відрізка AB , довжина якого дорівнює 20 см. Знайдіть відрізки AC і BC , якщо:
- 1) відрізок AC на 5 см більший за відрізок BC ;
 - 2) відрізок AC у 4 рази менший від відрізка BC ;
 - 3) $AC : BC = 9 : 11$.
- 35.° Точка K належить відріжку CD , довжина якого дорівнює 28 см. Знайдіть відрізки CK і KD , якщо:
- 1) відрізок CK на 4 см менший від відрізка KD ;
 - 2) відрізок CK у 6 разів більший за відрізок KD ;
 - 3) $CK : KD = 3 : 4$.
- 36.° Відрізки AB і CD рівні (рис. 39). Доведіть, що відрізки AC і BD теж рівні.



Рис. 39

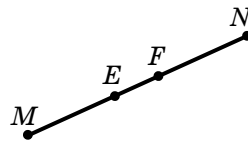


Рис. 40

- 37.° Відрізки ME і FN рівні (рис. 40). Доведіть, що $MF = EN$.
- 38.° Точка C ділить відрізок AB , довжина якого дорівнює a , на два відрізки. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і BC .
- 39.° Точки A , B і C лежать на одній прямій. Знайдіть відрізок BC , якщо $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Скільки розв'язків має задача?
- 40.° На прямій позначено точки A , B і C так, що $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і AC .
- 41.° Відрізок EF дорівнює 12 см. Знайдіть на прямій EF усі точки, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка EF дорівнює: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.
- 42.° Через точки A і B проведено пряму. Де на цій прямій лежить точка C , відстань від якої до точки B у 2 рази більша, ніж відстань від неї до точки A ?



- 43.** Відрізок, довжина якого дорівнює 32 см, поділили на три нерівних відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 18 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.
- 44.** Яку найменшу кількість внутрішніх точок треба позначити на відрізках, зображених на рисунку 41, щоб на кожному з них було позначено по дві внутрішні точки?

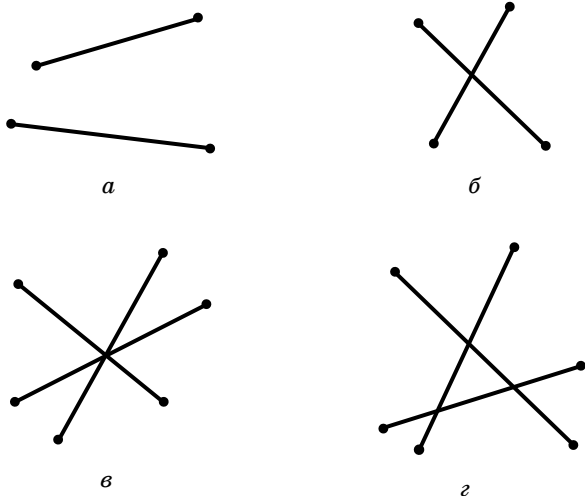


Рис. 41

- 45.** Скільки точок треба позначити між точками A і B , щоб разом з відрізком AB утворилося шість відрізків?
- 46.** На шкалі лінійки нанесено тільки поділки 0 см, 5 см і 13 см (рис. 42). Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?
- 47.** На шкалі лінійки нанесено тільки поділки 0 см, 7 см і 11 см. Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 8 см; 2) 5 см?

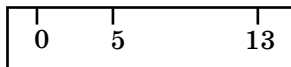


Рис. 42

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

48. Із прямокутників розмірами 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×13 складіть прямокутник, кожна сторона якого більша за 1.

3. Промінь. Кут. Вимірювання кутів

Проведемо пряму AB і позначимо на ній довільну точку O . Ця точка розбиває пряму на дві частини, які виділено на рисунку 43 різними кольорами. Кожну із цих частин разом з точкою O називають **променем** або **півпрямую**. Точку O називають **початком** променя.

Кожний із променів, які зображено на рисунку 43, складається з точки O та всіх точок прямої AB , що *лежать по один бік від точки O* .



Рис. 43

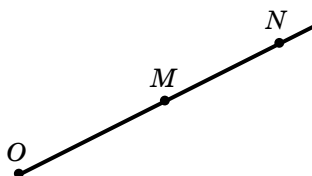


Рис. 44

Це дає змогу позначати промінь, називаючи дві його точки: першою обов'язково вказують початок променя, другою — будь-яку іншу точку, яка належить променю. Так, промінь з початком у точці O (рис. 44) можна позначити OM або ON .

Промені OA та OB (рис. 43) доповнюють один одного до прямої. Також можна сказати, що об'єднанням цих променів є пряма.

Означення. Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають **доповняльними**.

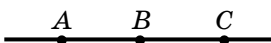


Рис. 45

Наприклад, промені BC і BA — доповняльні (рис. 45). Їхнім об'єднанням є пряма AC . Зауважимо, що, об'єднавши промені CA та AC , ми також отримаємо пряму AC . Проте ці промені не є доповняльними: у них немає спільного початку.

На рисунку 46, *a* зображено фігуру, яка складається з двох променів OA та OB , що мають спільний початок. Ця фігура ділить площину на дві частини, які виділено різними кольорами. Кожну із цих частин разом із променями OA та OB називають **кутом**.

Промені OA та OB називають **сторонами** кута, а точку O — **вершиною** кута.

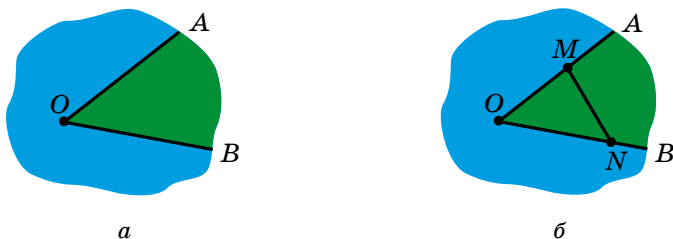


Рис. 46

Як бачимо, кути на рисунку 46, *a* зовні суттєво відрізняються. Ця відмінність визначена такою властивістю. На променях OA та OB виберемо довільні точки M і N (рис. 46, *б*). Відрізок MN належить «**зеленому**» куту, а «**синьому**» куту належать лише кінці відрізка.

Надалі, говорячи «кут», матимемо на увазі лише той, який містить будь-який відрізок із кінцями на його сторонах. Ситуації, коли розглядатимуться кути, для яких ця умова не виконується, будуть спеціально обумовлені.

Існує кілька способів позначення кутів. Кут на рисунку 47 можна позначити так: $\angle MON$, або $\angle NOM$, або просто $\angle O$ (читають відповідно: «кут MON », «кут NOM », «кут O »).

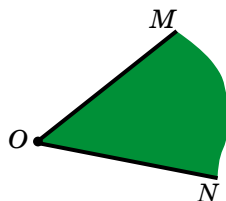
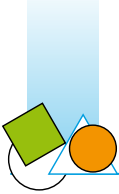


Рис. 47



На рисунку 48 зображено кілька кутів, які мають спільну вершину. Тут позначення кута однією буквою може призвести до плутанини. У таких випадках кути зручно позначати за допомогою цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читають відповідно: «кут один», «кут два», «кут три»).

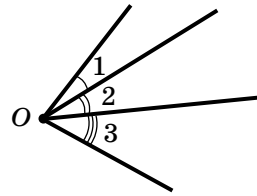


Рис. 48

Означення. Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають **розгорнутим** (рис. 49).

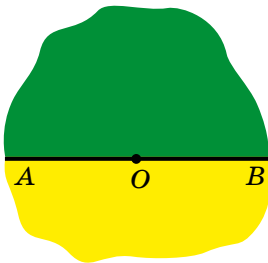


Рис. 49

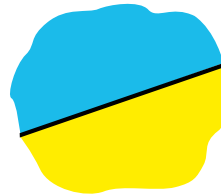


Рис. 50

На рисунку 49 промені OA та OB є доповняльними, тому кути, виділені зеленим і жовтим кольорами, є розгорнутими.

Будь-яка пряма ділить площину на дві **півплощини**, для яких ця пряма є **межею** (рис. 50). Вважають, що пряма належить кожній із двох півплощин, для яких вона є межею. А оскільки сторони розгорнутого кута утворюють пряму, то можна сказати, що розгорнутий кут — це півплощина, на межі якої позначено точку — вершину кута.

Означення. Два кути називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 51 зображено рівні кути ABC і MNK . Пишуть: $\angle ABC = \angle MNK$.

Зрозуміло, що всі розгорнуті кути рівні.

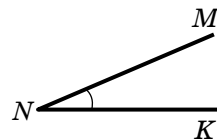
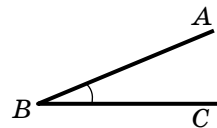


Рис. 51



На рисунку 52 зображено кут AOB і промінь OC , який належить цьому куту, проте відмінний від його сторін. Говорять, що *промінь OC проходить між сторонами кута AOB і ділить його на два кути AOC і COB .*

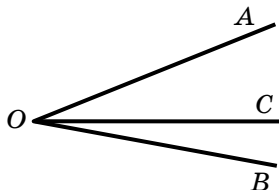


Рис. 52

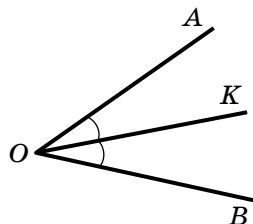


Рис. 53

Означення. Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

На рисунку 53 промінь OK — бісектриса кута AOB . Отже, $\angle AOK = \angle KOB$.

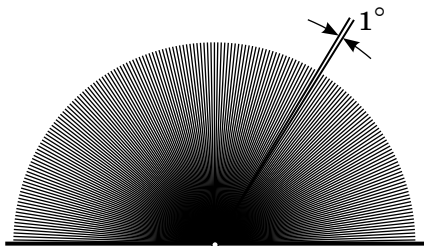


Рис. 54

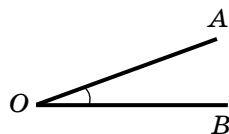
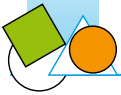


Рис. 55

Ви знаєте, що кожний кут має величину. Для її вимірювання треба вибрати одиницю виміру — **одичний кут**. Вибрати його можна, наприклад, так. Розділимо розгорнутий кут на 180 рівних кутів (рис. 54). Кут, утворений двома сусідніми променями, беруть за одиничний. Його величину називають **градусом** і записують: 1° .

Наприклад, градусна міра (величина) кута AOB (рис. 55) дорівнює 20° (цей факт легко встановити за допомогою



транспортира). У цьому випадку говорять: «кут AOB дорівнює 20° » і записують: $\angle AOB = 20^\circ$.

Із прийнятого означення градуса випливає, що *градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°* .

На рисунку 56, *а* зображено старовинний кутомірний прилад астролябію (у перекладі з грецької — «та, що хапає зорі»). Багато століть саме такий прилад допомагав мореплавцям знаходити шлях, астрономам — визначати положення зір. У наш час для вимірювання кутів на практиці використовують астролябію (рис. 56, *б*), а також інші прилади спеціального призначення: теодоліт (рис. 57) — для вимірювання на місцевості, бусоль (рис. 58) — в артилерії, секстант (рис. 59) — у морській справі.



а — старовинна;



б — сучасна



Рис. 56. Астролябія



Рис. 58. Бусоль



Рис. 59. Секстант

Для отримання більш точних результатів вимірювання кутів використовують частини градуса: $\frac{1}{60}$ градуса дорівнює одній хвилині ($1'$), тобто $1^\circ = 60'$; $\frac{1}{60}$ хвилини називають секундою ($1''$), тобто $1' = 60''$. Наприклад, запис $23^\circ 15' 11''$ означає, що градусна міра кута становить 23 градуси 15 хвилин 11 секунд.



Існують також інші одиниці виміру кутів: наприклад, у морській справі користуються одиницею 1 румб ($11^{\circ}15'$).

Означення. Кут, градусна міра якого дорівнює 90° , називають **прямим**. Кут, градусна міра якого менша від 90° , називають **гострим**. Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° , називають **тупим**.

На рисунку 60 зображено кути кожного з трьох видів.



Рис. 60

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

Якщо величина кута ABC більша за величину кута MNP , то говорять, що кут ABC більший за кут MNP , і записують: $\angle ABC > \angle MNP$. Також говорять, що кут MNP менший від кута ABC , і записують: $\angle MNP < \angle ABC$.

Надалі, говорячи «сума кутів», матимемо на увазі суму величин цих кутів.

Основна властивість величини кута. Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (рис. 61).

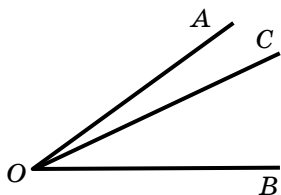


Рис. 61

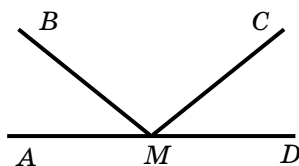


Рис. 62



Задача. На рисунку 62 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118^\circ$.
Знайдіть¹ кут AMB .

Розв'язання. Маємо: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,
 $\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Оскільки $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

Запишемо: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180^\circ$.

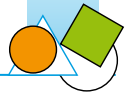
Тоді $2\angle AMB + 118^\circ = 180^\circ$. Звідси $\angle AMB = 31^\circ$.

Відповідь: 31° .



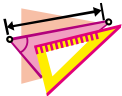
1. Як називають фігуру, утворену точкою, що належить прямій, та однією із частин, на які ця точка ділить пряму? Як при цьому називають дану точку?
2. Як позначають промінь?
3. Які два промені називають доповняльними?
4. Як називають фігуру, утворену двома променями зі спільним початком та однією із частин, на які ці промені ділять площину? Як при цьому називають дані промені? Їхній спільний початок?
5. Як позначають кут?
6. Який кут називають розгорнутим?
7. Як називають частини, на які пряма ділить площину?
8. Які два кути називають рівними?
9. Що називають бісектрисою кута?
10. У яких одиницях вимірюють кути?
11. Яка градусна міра розгорнутого кута?
12. Як називають кут, градусна міра якого дорівнює 90° ?
13. Який кут називають гострим?
14. Який кут називають тупим?
15. Що можна сказати про величини рівних кутів?
16. Що можна сказати про кути, величини яких рівні?
17. Сформулюйте основну властивість величини кута.

¹ Часто замість «Знайдіть градусну міру кута...» говорять: «Знайдіть кут...».



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 49.° Проведіть два промені AB і AC так, щоб вони не були доповняльними. Побудуйте до кожного із цих променів доповняльний промінь. Позначте й запишіть усі утворені промені.
- 50.° Проведіть відрізок AB і два промені AB і BA . Чи є ці промені доповняльними? Відповідь обґрунтуйте.
- 51.° Накресліть кут MNE і проведіть промені NA і NC між його сторонами. Запишіть усі кути, що утворилися.
- 52.° Проведіть промені OA , OB , OC і OD так, щоб промінь OC проходив між сторонами кута AOB , а промінь OD — між сторонами кута BOC .
- 53.° Накресліть два промені так, щоб їхня спільна частина була: 1) точкою; 2) відрізком; 3) променем.



ВПРАВИ

- 54.° Пряма EF перетинає прямі AB і CD (рис. 63). Укажіть: 1) усі промені, що утворилися, з початком у точці M ; 2) усі пари доповняльних променів з початком у точці K .
- 55.° Запишіть усі промені, які зображено на рисунку 64. Укажіть, які з них є доповняльними променями з початком у точці O .

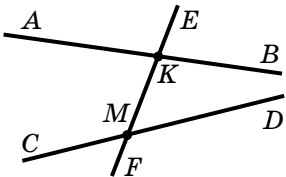


Рис. 63

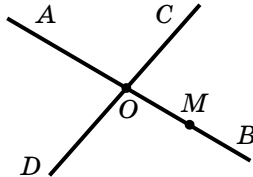


Рис. 64

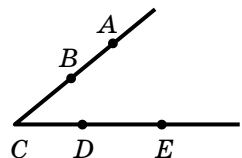
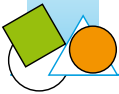


Рис. 65

- 56.° Чи можна кут, який зображено на рисунку 65, позначити так:
- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $\angle ABC$; | 3) $\angle ADC$; | 5) $\angle ACE$; | 7) $\angle BDE$; |
| 2) $\angle ACD$; | 4) $\angle DCA$; | 6) $\angle BCD$; | 8) $\angle ECD$? |



57.° Запишіть усі кути, які зображено на рисунку 66.

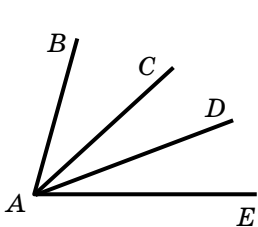


Рис. 66

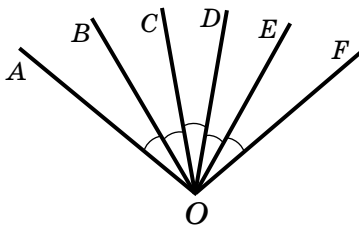


Рис. 67

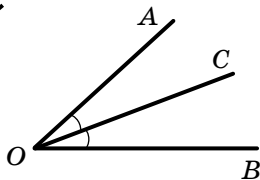


Рис. 68

58.° На рисунку 67 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.

- 1) Який промінь є бісектрисою кута AOC ? кута DOF ? кута BOF ?
- 2) Бісектрисою яких кутів є промінь OC ?

59.° На рисунку 68 промінь OC — бісектриса кута AOB . Чи можна сумістити накладанням: 1) кути AOC і BOC ; 2) кути AOC і AOB ?

60.° Промінь BD ділить кут ABC на два кути. Знайдіть:

- 1) кут ABC , якщо $\angle ABD = 54^\circ$, $\angle CBD = 72^\circ$;
- 2) кут CBD , якщо $\angle ABC = 158^\circ$, $\angle ABD = 93^\circ$.

61.° Промінь OP проходить між сторонами кута $МОК$. Знайдіть кут $МОР$, якщо $\angle МОК = 172^\circ$, $\angle РОК = 85^\circ$.

62.° Чи правильне твердження:

- 1) будь-який кут, менший від тупого, — гострий;
- 2) кут, менший від розгорнутого, — тупий;
- 3) кут, менший від тупого у 2 рази, — гострий;
- 4) сума двох гострих кутів більша за прямий кут;
- 5) кут, менший від розгорнутого кута у 2 рази, є більшим за будь-який гострий кут;
- 6) кут, більший за прямий, — тупий?

63.° Із вершини прямого кута $ВОМ$ (рис. 69) проведено два промені OA та OC так, що $\angle BOC = 74^\circ$, $\angle AOM = 62^\circ$. Знайдіть кут AOC .

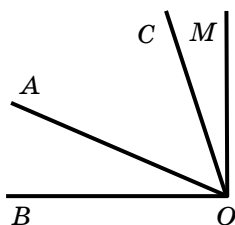
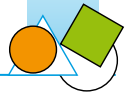


Рис. 69



64.° Із вершини розгорнутого кута ACP (рис. 70) проведено два промені CT і CF так, що $\angle ACF = 158^\circ$, $\angle TCF = 134^\circ$. Знайдіть кут TCF .

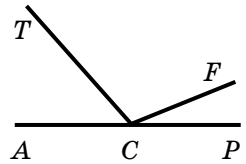


Рис. 70

65.° Кут CEF дорівнює 152° , промінь EM проходить між його сторонами, кут CEM на 18° більший за кут FEM . Знайдіть кути CEM і FEM .

66.° Промінь AK належить куту BAD . Знайдіть кути BAK і DAK , якщо кут BAK у 7 разів менший від кута DAK і $\angle BAD = 72^\circ$.

67.° На рисунку 71 рівні кути позначено дужками. Знайдіть кути ABC , MKE і STK , якщо за одиничний кут узято: 1) кут ABC ; 2) кут MKE .

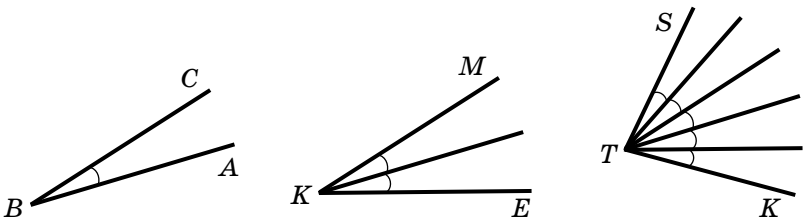


Рис. 71

68.° Точки A , B і C розміщено на прямій так, що $AB = 3,2$ см, $AC = 4,8$ см, $BC = 8$ см. Чи є промені AB і AC доповняльними?

69.° На рисунку 72 кут ABC прямий, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, промені BD і BK — бісектриси кутів ABE і FBC відповідно. Знайдіть кут DBK .

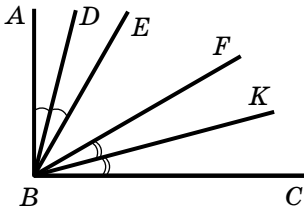


Рис. 72

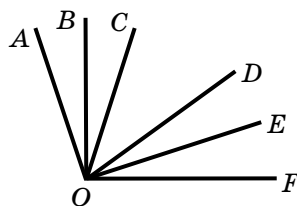


Рис. 73

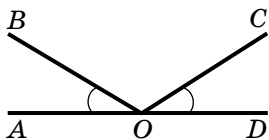
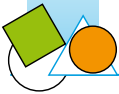


Рис. 74

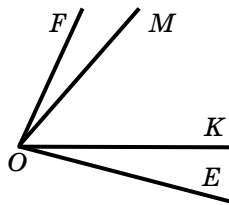


Рис. 75

- 70.* На рисунку 73 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, промінь OB — бісектриса кута AOC , промінь OE — бісектриса кута DOF , $\angle BOE = 72^\circ$. Знайдіть кут AOF .
- 71.* На рисунку 74 $\angle AOB = \angle DOC$. Чи є ще на цьому рисунку рівні кути? Відповідь обґрунтуйте.
- 72.* Кути FOK і MOE рівні (рис. 75). Чи рівні кути FOM і KOE ?
- 73.* Промінь BK є бісектрисою кута CBD , $\angle ABK = 146^\circ$ (рис. 76). Знайдіть кут CBD .
- 74.* Промінь BK є бісектрисою кута CBD , $\angle CBD = 56^\circ$ (рис. 76). Знайдіть кут ABK .
- 75.* На скільки градусів повертається за 1 хв: 1) хвилинна стрілка; 2) годинна стрілка?
- 76.* Знайдіть кут між стрілками годинника, якщо вони показують: 1) 3 год; 2) 6 год; 3) 4 год; 4) 11 год; 5) 7 год.
- 77.** Кут ABC дорівнює 30° , кут CBD — 80° . Знайдіть кут ABD . Скільки розв'язків має задача?
- 78.** Знайдіть кут $МОК$, якщо $\angle MON = 120^\circ$, $\angle KON = 43^\circ$. Скільки розв'язків має задача?
- 79.** Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить його на два кути. Доведіть, що кут між бісектрисами кутів, що утворилися, дорівнює 45° .
- 80.** Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 70° , побудувати кут, який дорівнює 40° ?
- 81.** Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 40° , побудувати кут, який дорівнює: 1) 80° ; 2) 160° ; 3) 20° ?

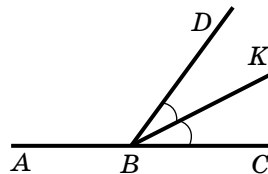
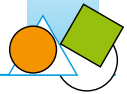


Рис. 76



- 82.* Як, використовуючи шаблон кута, що дорівнює 13° , побудувати кут, який дорівнює 2° ?
- 83.* Як побудувати кут, який дорівнює 1° , використовуючи шаблон кута, що дорівнює: 1) 19° ; 2) 7° ?
- 84.* Проведіть шість прямих, що перетинаються в одній точці. Чи правильно, що серед кутів, які при цьому утворилися, є кут, який менший від 31° ?



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

85. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через дев'ять точок (рис. 77) чотири відрізки (повертатися у вихідну точку не обов'язково).

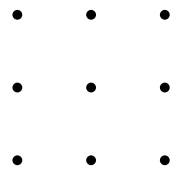


Рис. 77

4. Суміжні та вертикальні кути

Означення. Два кути називають **суміжними**, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

На рисунку 78 кути $\angle MOE$ і $\angle EON$ суміжні.

Теорема 4.1. Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Доведення. ☉ Нехай кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ суміжні (рис. 79). Треба довести, що $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.

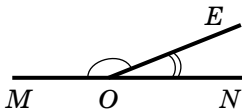


Рис. 78

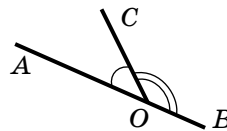
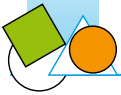


Рис. 79

Оскільки кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ суміжні, то промені OA та OB є доповняльними. Тоді кут $\angle AOB$ розгорнутий. Отже, $\angle AOB = 180^\circ$. Промінь OC належить куту $\angle AOB$. За основною властивістю величини кута маємо: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180^\circ$. ▲



Означення. Два кути називають **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

На рисунку 80 кути AOB і COD вертикальні.

Очевидно, що при перетині двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів, відмінних від розгорнутого. На рисунку 80 кути AOC і BOD також вертикальні.

Теорема 4.2. *Вертикальні кути рівні.*

Доведення. ☉ Якщо вертикальні кути є розгорнутими, то вони рівні.

На рисунку 81 кути 1 і 2 вертикальні та відмінні від розгорнутого. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 2$.

Кожний із кутів 1 і 2 суміжний із кутом 3. Тоді $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ і $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Звідси $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$ і $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$. Отримуємо, що градусні міри кутів 1 і 2 рівні, а отже, рівні й самі кути. ▲

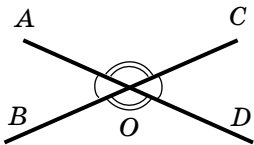


Рис. 80

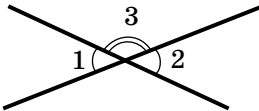


Рис. 81

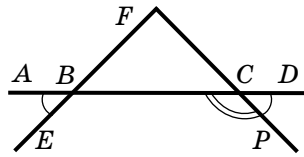


Рис. 82

Задача. На рисунку 82 $\angle ABE = \angle DCP$. Доведіть, що $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

Розв'язання. $\angle DCP + \angle BCP = 180^\circ$, оскільки кути DCP і BCP — суміжні. Кути DCP і ABE рівні за умовою. Кути ABE і FBC рівні як вертикальні.

Отже, $\angle DCP = \angle FBC$. Тоді $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$. ●



1. Які два кути називають суміжними?
2. Чому дорівнює сума суміжних кутів?
3. Які два кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте теорему про властивість вертикальних кутів.



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 86.° Накресліть три кути: гострий, прямий і тупий. Для кожного з них побудуйте суміжний кут.
- 87.° Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона була вертикальною.



ВПРАВИ

- 88.° Укажіть пари суміжних кутів (рис. 83).

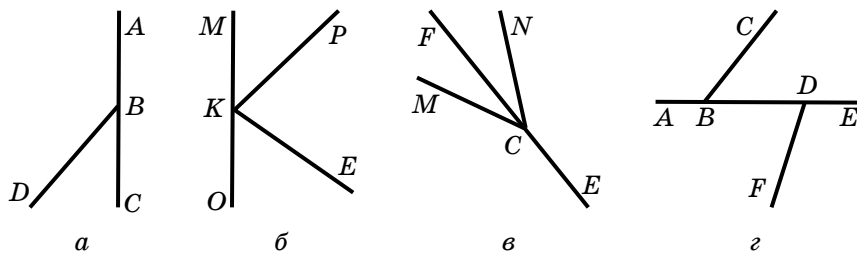


Рис. 83

- 89.° Чи є кути ABC і DBE вертикальними (рис. 84)?

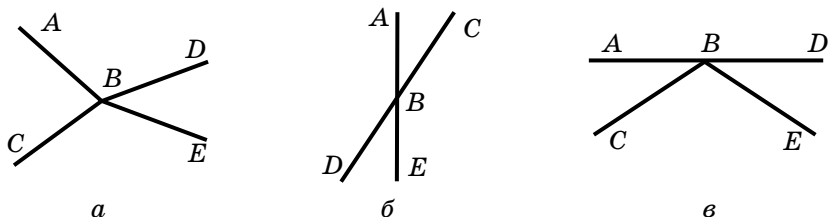


Рис. 84

- 90.° Скільки пар суміжних кутів зображено на рисунку 85? Назвіть їх. Укажіть пари вертикальних кутів.
- 91.° Чи можуть два суміжних кути дорівнювати: 1) 24° і 156° ; 2) 63° і 107° ? Відповідь обґрунтуйте.

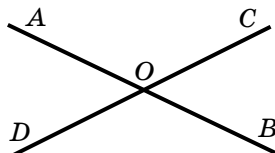
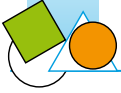


Рис. 85



- 92.° Знайдіть кут, суміжний із кутом: 1) 29° ; 2) 84° ; 3) 98° ; 4) 135° .
- 93.° Чи може пара суміжних кутів складатися:
- 1) із двох гострих кутів;
 - 2) із двох тупих кутів;
 - 3) із прямого та тупого кутів;
 - 4) із прямого та гострого кутів?
- 94.° Один із суміжних кутів — прямий. Яким є другий кут?
- 95.° Знайдіть кут, суміжний із кутом ABC , якщо: 1) $\angle ABC = 36^\circ$; 2) $\angle ABC = 102^\circ$.
- 96.° Знайдіть кути 2, 3 і 4 (рис. 86), якщо $\angle 1 = 42^\circ$.
- 97.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
- 1) один із них на 70° більший за другий;
 - 2) один із них у 8 разів менший від другого;
 - 3) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.
- 98.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
- 1) один із них у 17 разів більший за другий;
 - 2) їхні градусні міри відносяться як 19 : 26.
- 99.° Чи є правильним твердження:
- 1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут;
 - 2) для кожного кута, відмінного від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут;
 - 3) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
 - 4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні;
 - 5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні;
 - 6) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий;
 - 7) якщо два кути суміжні, то один із них більший за другий;
 - 8) якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то вони суміжні;
 - 9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180° , то вони не суміжні;
 - 10) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні;

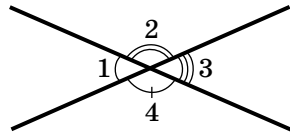
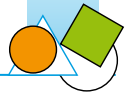


Рис. 86



- 11) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі;
 12) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні;
 13) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?
- 100.** Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 140° . Доведіть, що ці кути вертикальні.
- 101.** Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо:
 1) сума двох із них дорівнює 106° ;
 2) сума трьох із них дорівнює 305° .
- 102.** Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо різниця двох із них дорівнює 64° .
- 103.** Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 87). Знайдіть $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.
- 104.** Прямі AB , CD і MK перетинаються в точці O (рис. 88), $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle MOB = 15^\circ$. Знайдіть кути DOK , AOM і AOD .
- 105.** Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.
- 106.** Знайдіть кут між бісектрисами вертикальних кутів.
- 107.** Кути ABF і FBC суміжні, $\angle ABF = 80^\circ$, промінь BD належить куту ABF , $\angle ABD = 30^\circ$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів DBF і FBC .
- 108.** Кути AOB і BOC суміжні, промінь OD — бісектриса кута AOB , кут BOD на 18° менший від кута BOC . Знайдіть кути AOB і BOC .
- 109.** Знайдіть суміжні кути MKE і PKE , якщо кут FKE на 24° більший за кут PKE , де промінь KF — бісектриса кута MKE .

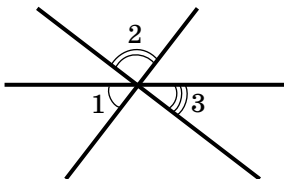


Рис. 87

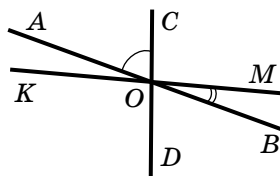


Рис. 88

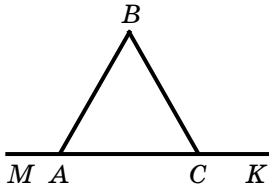
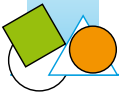


Рис. 89

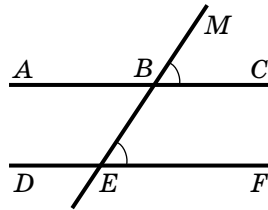


Рис. 90

110. На рисунку 89 $\angle MAB + \angle ACB = 180^\circ$. Доведіть, що $\angle MAB = \angle KCB$.
111. На рисунку 90 $\angle MBC = \angle BEF$. Доведіть, що $\angle ABE + \angle BED = 180^\circ$.
112. Два кути мають спільну сторону, а їхня сума дорівнює 180° . Чи можна стверджувати, що ці кути є суміжними?



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

113. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 91, на шість частин двома прямими.

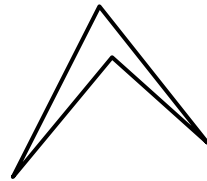


Рис. 91

5. Перпендикулярні прямі

На рисунку 92 позначено чотири кути, утворені при перетині прямих a і b . Легко показати (зробіть це самостійно), що коли один із кутів прямий (наприклад, кут 1), то й кути 2, 3 і 4 теж прямі.

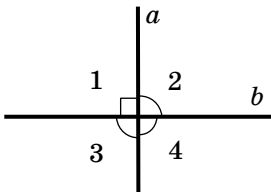


Рис. 92

Означення. Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

На рисунку 92 прямі a і b перпендикулярні. Пишуть: $a \perp b$ або $b \perp a$.

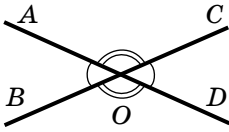
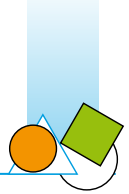


Рис. 93

На рисунку 93 прямі AD і BC не перпендикулярні. При їхньому перетині утворилися пара рівних гострих кутів і пара рівних тупих кутів. Величину гострого кута, що утворився, називають **кутом між прямими AD і BC** .

Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90° .

Зі сказаного випливає, що кут між двома прямими не перевищує 90° .

Означення. Два відрізки називають **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

На рисунку 94 відрізки AB і CD перпендикулярні. Пишуть: $AB \perp CD$.

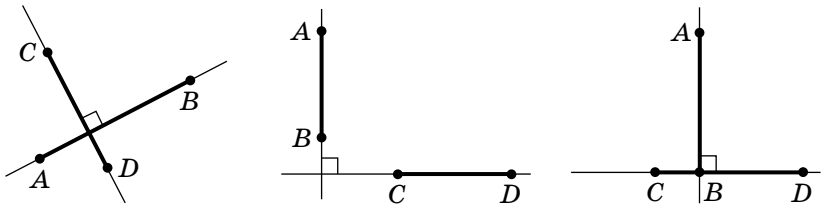


Рис. 94

Так само можна розглядати перпендикулярність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 95 зображено перпендикулярні відрізок CD і промінь AB .

На рисунку 96 зображено пряму a та перпендикулярний до неї відрізок AB , кінець B якого належить прямій a .

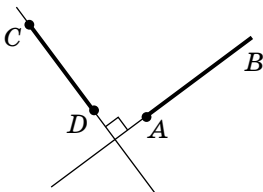


Рис. 95

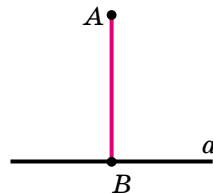
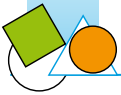


Рис. 96



У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a опущено перпендикуляр AB . Точку B називають основою перпендикуляра AB .

Довжину перпендикуляра AB називають відстанню від точки A до прямої a . Якщо точка A належить прямій a , то природно вважати, що відстань від точки A до прямої a дорівнює нулю.

На рисунку 97 зображено перпендикуляр OM , який опущено з точки O на пряму AB . Якщо основа цього перпендикуляра, точка M , належить відрізку AB (променю AB), то довжину відрізка OM називають відстанню від точки O до відрізка AB (променя AB).

Якщо точка належить відрізку (променю), то природно вважати, що відстань від цієї точки до відрізка (променя) дорівнює нулю.

Опустимо з точки A на пряму a перпендикуляр AB (рис. 98). Нехай X — довільна точка прямої a , відмінна від точки B . Відрізок AX називають похилою, проведеною з точки A до прямої a .

Теорема 5.1. *Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.*

Доведення. ☉ Позначимо на прямій AB довільну точку M і побудуємо прямий кут CMB (рис. 99). Тоді $CM \perp AB$.

Припустимо, що через точку M проходить ще одна пряма MD , відмінна від CM і перпендикулярна до прямої AB .

Розглянемо випадок, коли промінь MD належить куту CMB . Тоді за основною властивістю величини кута $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Звідси $\angle CMB > \angle DMB$. Проте насправді

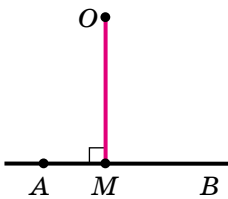


Рис. 97

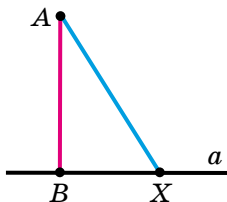


Рис. 98

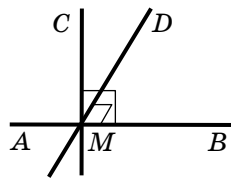


Рис. 99

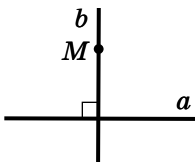


Рис. 100

$\angle CMB = \angle DMB = 90^\circ$. Отже, наше припущення неправильне.

Аналогічно розглядають випадок, коли промінь MC належить куту DMB . ▲

Ви вмієте через довільну точку M , яка не належить прямій a , проводити пряму b , перпендикулярну до прямої a (рис. 100). Те, що така пряма b є єдиною, доведемо в п. 7.

1. Які дві прямі називають перпендикулярними?
2. Яким символом позначають перпендикулярні прямі?
3. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
4. Які два відрізки називають перпендикулярними?
5. Що називають відстанню від точки до прямої?
6. Скільки через кожну точку прямої можна провести прямих, перпендикулярних до даної?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

114.° Перерисуйте в зошит рисунок 101. Користуючись косинцем, проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої a .

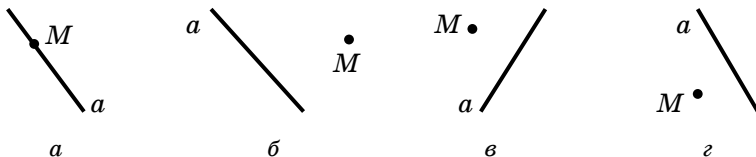
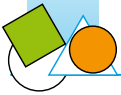
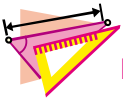


Рис. 101

115.° Проведіть пряму c і позначте на ній точку K . Користуючись косинцем, проведіть через точку K пряму, перпендикулярну до прямої c .



- 116.° Проведіть пряму d і позначте точку M , яка їй не належить. За допомогою косинця проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої d .
- 117.° Накресліть кут ABK , який дорівнює: 1) 73° ; 2) 146° . Позначте на промені BK точку C і проведіть через неї прямі, перпендикулярні до прямих AB і BK .
- 118.° Накресліть два перпендикулярних відрізки так, щоб вони: 1) перетиналися та не мали спільного кінця; 2) не мали спільних точок; 3) мали спільний кінець.
- 119.° Накресліть два перпендикулярних промені так, щоб вони: 1) перетиналися; 2) не мали спільних точок.



ВПРАВИ

- 120.° На рисунку 102 прямі AC і DK перпендикулярні. Чи перпендикулярні:
- 1) відрізки AB і BK ;
 - 2) відрізки BC і DF ;
 - 3) промені BC і BK ;
 - 4) відрізок AB і промінь FD ?
- 121.° Чи може кут між прямими дорівнювати: 1) 1° ; 2) 80° ; 3) 90° ; 4) 92° ; 5) 101° ?
- 122.° Доведіть, що коли бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні, то точки A , O і C лежать на одній прямій.
- 123.° На рисунку 103 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42^\circ$, $\angle MOK + \angle BOK = 130^\circ$. Знайдіть: 1) кут $МОК$; 2) кут $МОD$.
- 124.° На рисунку 104 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54^\circ$. Знайдіть кут ABF .

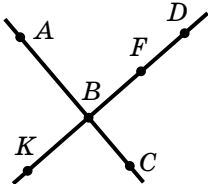


Рис. 102

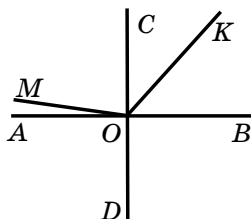


Рис. 103

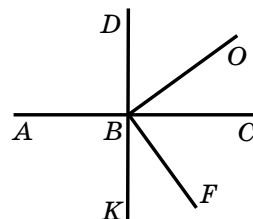


Рис. 104

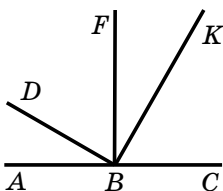


Рис. 105

- 125.°** Кут ABC дорівнює 160° , промені BK і BM проходять між сторонами цього кута й перпендикулярні до них. Знайдіть кут MBK .
- 126.°** На рисунку 105 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle FBK$.
- 127.°** На рисунку 105 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Доведіть, що $BF \perp AC$.
- 128.**** Із вершини кута ABC , який дорівнює 70° , проведено промені BD і BF так, що $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, промені BD і BC належать куту ABF . Знайдіть кути DBF і ABF .
- 129.*** Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 17° , побудуйте кут, який дорівнює: 1) 5° ; 2) 12° .
- 130.*** Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 20° , побудуйте кут, який дорівнює 10° .



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 131.** На рисунку 106 пряма перетинає всі сторони восьмикутника. Чи може пряма перетинати всі сторони тринадцятикутника, не проходячи через жодну з його вершин?



Рис. 106

6. Аксіоми

У попередніх пунктах було доведено чотири теореми. Щоразу, доводячи нову властивість фігури, ми спиралися на раніше відомі геометричні факти. Наприклад, під час доведення теореми про вертикальні кути була використана властивість суміжних кутів. Керуючись цим принципом, ми доведемо ще багато нових теорем. Проте вже зараз, на початковому етапі вивчення геометрії, виникає природне запитання: якщо властивості геометричних фігур вивчають за принципом



«нове зі старого», то повинні існувати найперші, початкові факти, і тоді на чому базується обґрунтування їхньої справжності? Адже до них ніяких істинних тверджень не було. Розв'язати цю проблему можна в єдиний спосіб: прийняти перші властивості без доведення. Так і роблять математики. Ці властивості називають **аксіомами**.

За аксіоми вибирають твердження, які є простими, очевидними та не викликають сумнівів. Адже не дарма слово «аксіома», що походить від грецького «*аксіос*», означає «гідне визнання».

Деякі аксіоми були сформульовані в попередніх пунктах. Вони називалися **основними властивостями**.

Частину аксіом ми не виділяли якимось спеціальним чином, а просто формулювали як наочно очевидні твердження. Зокрема, у п. 2 було сформульовано аксіоми:

для будь-яких двох точок існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями;

кожний відрізок має певну довжину;

кожний кут має певну величину.

Ми спиралися й на деякі інші істинні твердження, прийняті без доведення, тобто за суттю на аксіоми, але сформульовані в неявному вигляді. Наприклад, у п. 1, описуючи рисунок 13, ми фактично використали таку аксіому:

якою б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які не належать їй.

Аксиоми використовують не тільки в математиці. Нерідко в повсякденному житті будь-яке істинне твердження, що не потребує обґрунтування, називають аксіомою. Наприклад, говорять: «Після березня настане квітень. Це аксіома».

Аксиоми виникають не лише на основі практики або спостережень.

Для будь-якого громадянина України Конституція — це перелік аксіом. Тому аксіому можна розглядати як закон або правило. Проте закони (правила гри) приймають, тобто вони виникають у результаті домовленості людей між собою.



Отже, аксіоми геометрії можна також розглядати як затверджені правила, на підставі яких геометри, як муляри, зводять будівлю науки (рис. 107).



Рис. 107

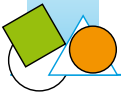
Тоді у вас може виникнути запитання: «Невже геометрію можна сприймати як гру, наприклад таку, як шахи?» Певною мірою — так. Проте при цьому слід розуміти, що шахові правила, а отже, і сама гра виникли завдяки людській фантазії. Разом з тим геометричні правила (аксіоми) виникли з практики та спостережень. Тому геометрія, на відміну від шахів, застосовується дуже широко.

Якщо ви оберете фах математика, то зможете ознайомитися із зовсім іншими геометріями, які відрізняються від тієї, яку ви вивчаєте в школі, тим, що вони побудовані на інших аксіомах.



З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРІЇ

Коли й де виникли перші геометричні відомості? Фахівці не відповідають на це запитання однозначно. Деякі вважають, що першовідкривачами були єгипетські та вавилонські



землеміри, які жили за 4000 рр. до н. е., інші припускають, що геометрія зародилася в Стародавньому Єгипті 5000 років тому.

Може здатися дивним, але питання, коли виникла **наука геометрія**, не викликає суперечок. Історики зійшлися на думці: у VI ст. до н. е. Така одностайність, на перший погляд, уражає, адже й до тих часів народи стародавнього світу накопичили величезний обсяг геометричних знань. Напри-



Стародавній папірус



Єгипетські піраміди

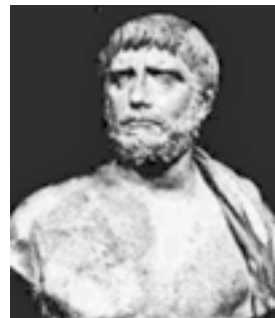
клад, цілком очевидно, що без геометричного досвіду єгиптяни не подарували б світові одне із «семи див світу» — піраміди. І все ж таки чому велика кількість накопичених геометричних фактів нерівносільна існуванню геометричної науки?

Геометрія стала наукою лише тоді, коли її істини почали встановлювати шляхом доведення.

Поява «доказової геометрії» пов'язана з іменем першого із «семи мудреців» — Фалеса Мілетського¹ (близько 625–547 рр. до н. е.) — філософа, ученого, купця й державного діяча.

Задовго до Фалеса було відомо, що вертикальні кути рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини. Ніхто в істинності цих фактів не сумнівався. А Фалес довів їх, тим самим прославивши себе.

У VI–III ст. до н. е. завдяки вченим Стародавньої Греції, таким як Піфагор, Евдокс, Архіт, Теетет, Евклід, Архімед, геометрія з прикладної науки перетворилася на математичну теорію.



Фалес Мілетський

¹ Мілет — порт у Малій Азії на узбережжі Егейського моря.



Евклід

Книгу, за якою вивчали геометрію понад 2000 років, без перебільшення можна назвати визначною. Вона має назву «Начала», її автором є Евклід (близько 365–300 рр. до н. е.). На жаль, про самого Евкліда мало що відомо. У таких випадках постать обростає легендами, одна з яких дуже повчальна. Цар Птолемей I запитав Евкліда, чи існує більш простий шлях пізнання геометрії, ніж той, що викладений у «Началах». Евклід відповів: «У геометрії немає царських шляхів».

А який же шлях у геометрію обрав Евклід у своїх «Началах»? Аксиоматичний. У фундаменті науки — перелік найпростіших фактів. Їх називають постулатами (від латинського *postulatum* — вимога) й аксіомами. Потім, базуючись на них, шляхом логічних міркувань доводять усі інші властивості — теореми.



«Начала» Евкліда



Постулатів у Евкліда п'ять. Наведемо перші чотири.

- I постулат.** Потрібно, щоб від кожної точки до будь-якої іншої точки можна було провести пряму лінію.
- II постулат.** І щоб кожну пряму можна було необмежено продовжити.
- III постулат.** І щоб з будь-якого центра можна було описати коло будь-якого радіуса.
- IV постулат.** І щоб усі прямі кути були рівні.

Про п'ятий постулат ми розкажемо після п. 14.

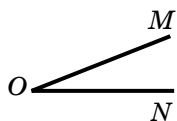
Протягом багатьох століть за популярністю з «Началами» Евкліда могла зрівнятися хіба що Біблія. Так, ще наприкінці XIX ст. у ряді європейських країн геометрію викладали за спрощеними виданнями «Начал».

І зараз геометрія, яку вивчають у школі, багато в чому наслідує ідеї Евкліда.

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

- Скільки прямих визначають три точки, які не лежать на одній прямій?
А) 2; Б) 4; В) 3; Г) 1.
- Скільки можна провести відрізків, які містять дві задані точки?
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) безліч.
- Точка M є внутрішньою точкою відрізка PQ . Яке з поданих тверджень є правильним?
А) $PM + MQ = PQ$; В) $MQ = PQ + PM$;
Б) $PQ = PM - MQ$; Г) $PM = PQ + MQ$.
- Точки A , B і C лежать на одній прямій, причому $BC = 8$ см, $AB - BC = 8$ см. Яке з поданих тверджень є правильним?
А) Точка A — середина відрізка BC ;
Б) точка B — середина відрізка AC ;
В) точка C — середина відрізка AB ;
Г) точки A і B збігаються.



5. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 14 см?
А) Безліч; Б) 1; В) 2; Г) жодної.
6. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 12 см?
А) Жодної; Б) 2; В) безліч; Г) 1.
7. Два промені є доповняльними, якщо:
А) вони мають спільний початок;
Б) їхнім об'єднанням є пряма й вони мають спільний початок;
В) вони належать одній прямій;
Г) їхнім об'єднанням є пряма.
8. Яке позначення кута, зображеного на рисунку, є неправильним?
А) $\angle O$; Б) $\angle OMN$;
В) $\angle MON$; Г) $\angle NOM$.
- 
9. Яке з поданих тверджень є хибним?
А) Суміжні кути мають спільну вершину;
Б) суміжні кути мають спільну сторону;
В) завжди один із суміжних кутів гострий, а другий — тупий;
Г) якщо кути AOC і COB суміжні, то промені OA і OB доповняльні.
10. Яке з поданих тверджень є хибним?
А) Вертикальні кути рівні;
Б) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
В) вертикальні кути мають спільну вершину;
Г) сторони вертикальних кутів утворюють дві пари доповняльних променів.
11. Яке з поданих тверджень є правильним?
А) Перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку;
Б) перпендикулярні промені завжди мають спільну точку;
В) перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку;
Г) перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Основна властивість прямої

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Прямі, що перетинаються

Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

Теорема про дві прямі, що перетинаються

Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Рівні відрізки

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Основна властивість довжини відрізка

Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB , то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB , тобто $AB = AC + CB$.

Відстань між точками

Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB .

Доповняльні промені

Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Розгорнутий кут

Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

Рівні кути

Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

**Бісектриса кута**

Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

Гострий, прямий, тупий кути

Кут, градусна міра якого дорівнює 90° , називають прямим.

Кут, градусна міра якого менша від 90° , називають гострим.

Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° , називають тупим.

Основна властивість величини кута

Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Суміжні кути

Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

Властивість суміжних кутів

Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Вертикальні кути

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

Властивість вертикальних кутів

Вертикальні кути рівні.

Перпендикулярні прямі

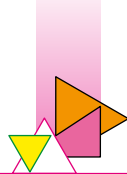
Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

Теорема про пряму, перпендикулярну до даної

Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.

Як, не накладаючи один трикутник на другий, дізнатися, чи є вони рівними? Які властивості притаманні рівнобедреному й рівносторонньому трикутникам? Яку «будову» має теорема? На ці й багато інших запитань ви знайдете відповіді в цьому параграфі.





7. Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника

Розглянемо три точки A , B , C , які не лежать на одній прямій. Сполучимо їх відрізками AB , BC , CA . Утворена фігура обмежує частину площини, виділену на рисунку 108 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB , BC і CA називають **трикутником**. Точки A , B , C називають **вершинами трикутника**, а відрізки AB , BC , CA — **сторонами трикутника**.

Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку 108, позначають так: $\triangle ABC$ (читають: «трикутник ABC »), або $\triangle BCA$ (читають: «трикутник BCA »), або $\triangle ACB$ і т. д.).

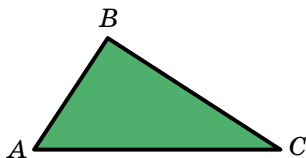


Рис. 108

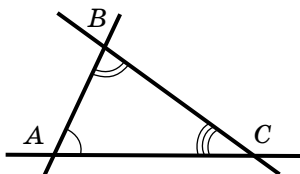


Рис. 109

Кути BAC , ABC , BCA (рис. 109) називають **кутами трикутника ABC** .

У трикутнику ABC (рис. 109), наприклад, кут B називають **кутом, протилежним стороні AC** , а кути A і C — **кутами, прилеглими до сторони AC** , сторону AC — **стороною, протилежною куту B** , сторони AB і AC — **сторонами, прилеглими до кута A** .

Означення. **Периметром трикутника** називають суму довжин усіх його сторін.

Периметр позначають буквою P . Наприклад, для периметра трикутника MNK використовують позначення P_{MNK} .

Означення. Трикутник називають **гострокутним**, якщо всі його кути гострі.

Трикутник називають **прямокутним**, якщо один із його кутів прямий.



Трикутник називають **тупокутним**, якщо один із його кутів тупий (рис. 110).



Рис. 110

Означення. Два трикутники називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 111 зображено рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Записують: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Ці трикутники можна сумістити так, що вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 збігатимуться. Тоді можна записати: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Ті сторони й ті кути, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають **відповідними сторонами** й **відповідними кутами**. Так, на рисунку 111 сторони AC і A_1C_1 , кути A та A_1 відповідні.

Зазвичай на рисунках рівні сторони позначають однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок (рис. 111).

Зауважимо, що в рівних трикутниках проти відповідних кутів лежать відповідні сторони, і навпаки: проти відповідних сторін лежать відповідні кути.

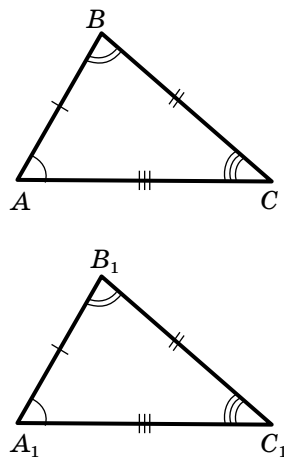
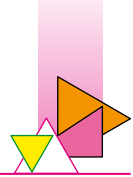


Рис. 111



Основна властивість рівності трикутників. Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC , такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M , а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M (рис. 112).

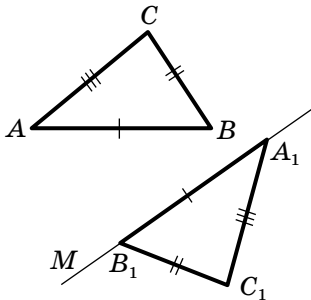


Рис. 112

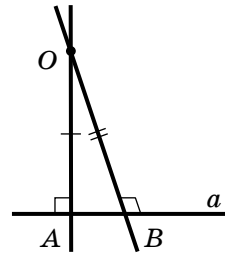


Рис. 113

Теорема 7.1. *Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.*

Доведення. ☺ Розглянемо пряму a і точку O , яка їй не належить. Припустимо, що через точку O проходять дві прямі OA та OB , перпендикулярні до прямої a (рис. 113).

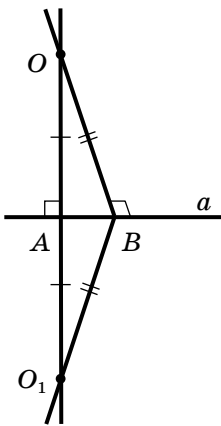


Рис. 114

За основною властивістю рівності трикутників існує трикутник O_1AB , який дорівнює трикутнику OAB , такий, що $AO = AO_1$ і $BO = BO_1$ (рис. 114). Тоді $\angle OAB = \angle O_1AB$. Отже, $\angle O_1AB = 90^\circ$. Звідси $\angle OAO_1 = 180^\circ$, а отже, точки O , A , O_1 лежать на одній прямій.

Аналогічно доводять, що точки O , B , O_1 також лежать на одній прямій. Але тоді прямі OA та OB мають дві точки перетину: O та O_1 . А це суперечить теоремі 1.1. Отже,



наше припущення неправильне. Таким чином, через точку O проходить одна пряма, перпендикулярна до прямої a . ▲

Можливо, ви помітили, що означення рівних відрізків, рівних кутів і рівних трикутників дуже схожі. Тому доцільно прийняти таке означення рівних фігур.

Означення. Дві фігури називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 115 зображено рівні фігури Φ_1 і Φ_2 . Пишуть: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Зрозуміло, що будь-які дві прямі (два промені, дві точки) рівні.

Означення. Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають **висотою трикутника**.

На рисунку 116 відрізки BB_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC .

Означення. Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають **медіаною трикутника**.

На рисунку 117 відрізок AM — медіана трикутника ABC .

Означення. Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають **бісектрисою трикутника**.

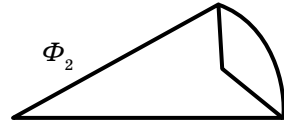
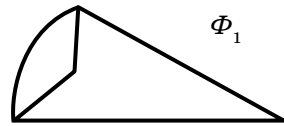


Рис. 115

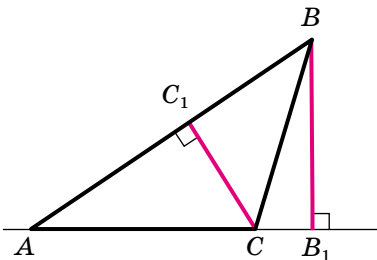


Рис. 116

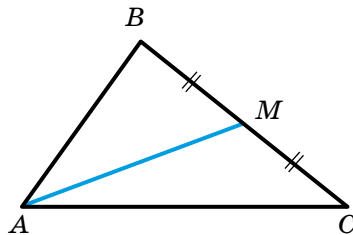


Рис. 117

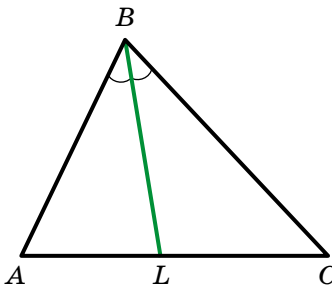
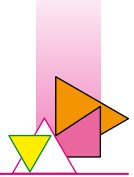


Рис. 118

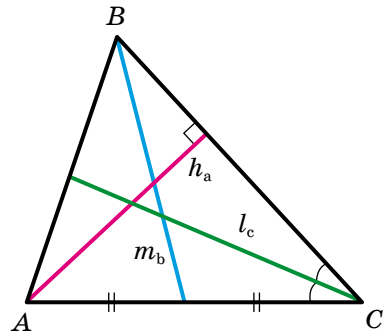


Рис. 119

На рисунку 118 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC .

Кожний трикутник має три висоти, три медіани й три бісектриси.

Часто довжини сторін трикутника, протилежних кутам A, B, C , позначають відповідно a, b, c . Довжини висот позначають h_a, h_b, h_c , медіан — m_a, m_b, m_c , бісектрис — l_a, l_b, l_c . Індекс показує, до якої сторони проведено відрізок (рис. 119).



1. Як називають і позначають трикутник?
2. Що називають периметром трикутника?
3. Які існують види трикутників залежно від виду їхніх кутів?
4. Який трикутник називають прямокутним? тупокутним? гострокутним?
5. Які два трикутники називають рівними?
6. Як називають ті пари сторін і пари кутів рівних трикутників, які суміщаються при накладанні?
7. Які дві фігури називають рівними?
8. Що називають висотою трикутника?
9. Що називають медіаною трикутника?
10. Що називають бісектрисою трикутника?
11. Скільки кожний трикутник має висот? медіан? бісектрис?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

132.° Накресліть трикутник:

- 1) гострокутний;
- 2) прямокутний;
- 3) тупокутний.

Проведіть із кожної вершини трикутника висоту.

133.° Перерисуйте в зошит рисунок 120, проведіть висоту, спільну для всіх трьох зображених трикутників. У якого з них ця висота розміщена поза трикутником?

134.° Перерисуйте в зошит трикутники, зображені на рисунку 121, проведіть у кожному з них усі висоти.

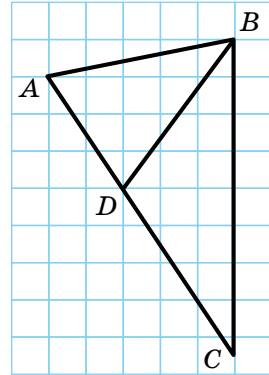


Рис. 121

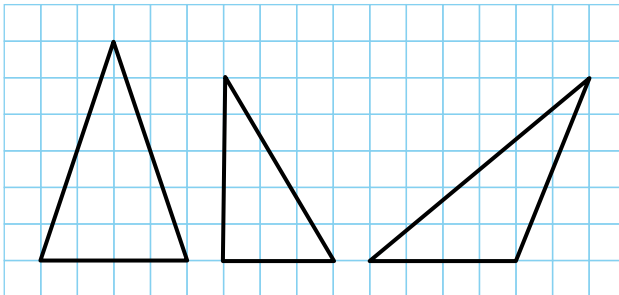
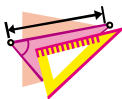
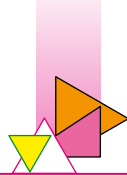


Рис. 121

135.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його медіани.

136.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси.



ВПРАВИ

- 137.° Накресліть довільний трикутник, позначте його вершини буквами M , K і E . Укажіть:
- 1) сторону, протилежну куту M ;
 - 2) кут, протилежний стороні MK ;
 - 3) сторони, прилеглі до кута K ;
 - 4) кути, прилеглі до сторони KE .
- 138.° Запишіть сторони, вершини, кути трикутника CEF (рис. 122). Укажіть:
- 1) кут, протилежний стороні CF ;
 - 2) кути, прилеглі до сторони CE ;
 - 3) сторону, протилежну куту E ;
 - 4) сторони, прилеглі до кута F .
- 139.° Одна зі сторін трикутника в 5 разів менша від другої та на 25 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 74 см.
- 140.° Сторони трикутника відносяться як $5 : 7 : 11$, а сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 80 см. Обчисліть периметр трикутника.
- 141.° Периметр трикутника дорівнює 48 см, а його сторони відносяться як $7 : 9 : 8$. Знайдіть сторони трикутника.
- 142.° Трикутники APK і MCE рівні, кути A і C відповідні, $PK = 10$ см. Знайдіть сторону ME .
- 143.° Трикутники ABC і DEF рівні, сторони AB і DE , BC і DF відповідні, $\angle B = 32^\circ$. Знайдіть кут D .
- 144.° Трикутники ABC і KTM рівні, кути A і M , B і K відповідні, $\angle C = 40^\circ$, $MK = 5$ см. Знайдіть кут T і сторону AB .
- 145.° Чи є правильним твердження:
- 1) якщо трикутники рівні, то їхні периметри теж рівні;
 - 2) якщо периметри двох трикутників рівні, то й самі трикутники рівні?

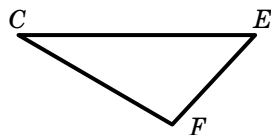


Рис. 122



- 146.° Які з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — завжди належать трикутнику?
- 147.° Який з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — може збігатися з його стороною? Укажіть вид трикутника, для якого це можливо.
- 148.° 1) Чи може одна висота трикутника належати йому, а дві інші — ні?
2) Чи може тільки одна висота трикутника збігатися з його стороною?
3) У якому трикутнику три висоти перетинаються в його вершині?
- 149.° Медіана BD трикутника ABC розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 32 см і 36 см. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $BD = 10$ см.
- 150.° Медіана трикутника, периметр якого дорівнює 60 см, розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 36 см і 50 см. Чому дорівнює довжина цієї медіани?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

151. На рисунку 123 $KP = PE = EF = FT = 1$ см. Які рівні відрізки є ще на цьому рисунку? Знайдіть їхні довжини.

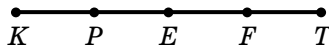


Рис. 123

152. Промінь BD розбиває кут ABC , який дорівнює 72° , на два кути ABD і CBD так, що $\angle ABD = 5 \angle CBD$. Промінь BK проходить так, що промінь BA є бісектрисою кута DBK . Визначте градусну міру та вид кута DBK .

ЗМІСТ

<i>Від авторів</i>	3
<i>Умовні позначення</i>	7
<i>Вступ. Що вивчає геометрія?</i>	8
§ 1. Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості	11
1. Точки та прямі.....	12
2. Відрізок і його довжина	17
3. Промінь. Кут. Вимірювання кутів.....	25
4. Суміжні та вертикальні кути.....	36
5. Перпендикулярні прямі	41
6. Аксиоми.....	46
● З історії геометрії	48
<i>Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	51
<i>Головне в параграфі 1</i>	53
§ 2. Трикутники	55
7. Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника	56
8. Перша та друга ознаки рівності трикутників.....	64
9. Рівнобедрений трикутник та його властивості ...	74
10. Ознаки рівнобедреного трикутника	81
11. Третя ознака рівності трикутників	87
12. Теореми.....	92
<i>Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	97
<i>Головне в параграфі 2</i>	100
§ 3. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника	103
13. Паралельні прямі	104
14. Ознаки паралельності двох прямих	109
● П'ятий постулат Евкліда	116
15. Властивості паралельних прямих	117
16. Сума кутів трикутника. Нерівність трикутника	124
17. Прямокутний трикутник	133
18. Властивості прямокутного трикутника	140
<i>Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	144
<i>Головне в параграфі 3</i>	146

§ 4. Коло та круг. Геометричні побудови	149
19. Геометричне місце точок. Коло та круг.....	150
20. Властивості кола. Дотична до кола.....	159
21. Описане та вписане кола трикутника.....	166
22. Задачі на побудову	174
23. Метод геометричних місць точок у задачах на побудову	185
● З історії геометричних побудов	191
<i>Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	193
<i>Головне в параграфі 4</i>	194
<i>Вправи для повторення за курс 7 класу</i>	197
● Дружимо з комп'ютером	207
<i>Відповіді та вказівки до вправ</i>	212
<i>Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	218
<i>Предметний покажчик</i>	219
<i>Походження математичних термінів</i>	221