

Міні-підручник ГЕОМЕТРІЯ

Замовляйте безкоштовний каталог видань поштою:
а/с «Книжкова ліга», м. Харків, 61057, тел. (057) 719 98 80
www.torsing.com.ua

3 питань оптичних поставок звертайтеся за
тел. (057) 717 10 26, тел./факс (057) 719 98 73
SMS-замовлення книг: відправте SMS
з текстом «КНИГА» на номер 7500
та чекайте дзвінка від служби замовлень.
Вартість повідомлення 2,50 грн.



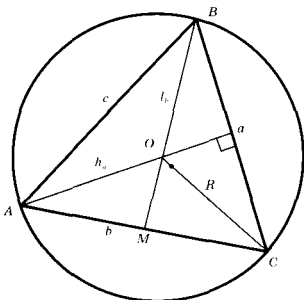
© Роганін О. М., Титаренко О. М., 2007
© ФДП Шапіро М. В., макет, 2007



Зміст

1. Трикутник.
2. Чотирикутник.
3. Правильні многокутники.
4. Коло, круг.
5. Паралелепіпед.
6. Куб.
7. Призма.
8. Піраміда.
9. Тіла обертання.
10. Вектори.

Трикутник



$$P = a + b + c;$$

$$p = \frac{a + b + c}{2};$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \quad (h_a \text{ — висота});$$

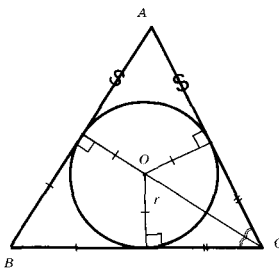
$$S = \frac{1}{2} cb \sin A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad (\text{теорема косинусів});$$

$$\frac{AM}{MC} = \frac{c}{a}, \quad (l_b \text{ — бісектриса}); \quad R = \frac{abc}{4S};$$

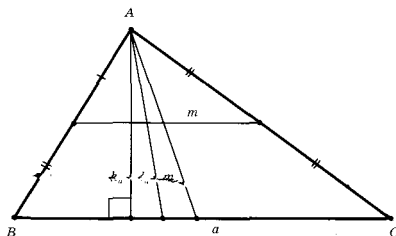
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



$$S = pr;$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c};$$

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$



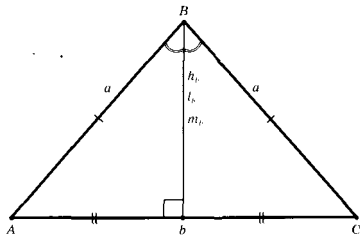
$$m = \frac{a}{2}, \quad (m \text{ — середня лінія});$$

$$h_a \leq l_a \leq m_a; \quad m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2};$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

m_a, m_b, m_c — медіани.

Рівнобедрений трикутник



$$P = 2a + b;$$

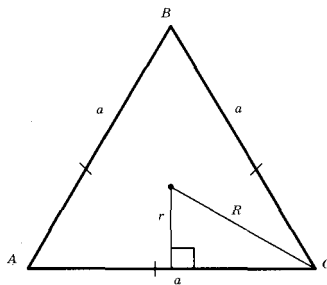
$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - \angle B}{2};$$

$$h_b = l_b = m_b = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - b^2};$$

$$S = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}; \quad R = \frac{a^2}{2h_b}; \quad R = \frac{a}{2 \cos \frac{B}{2}};$$

$$r = \frac{b(2a - b)}{4h_b}; \quad r = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Рівносторонній трикутник



$$P = 3a;$$

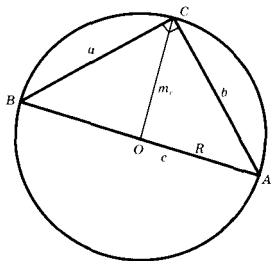
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ;$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$h_a = m_a = l_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Прямокутний трикутник



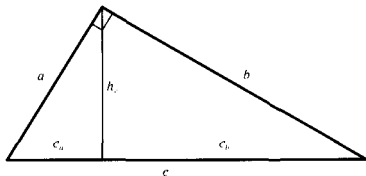
$$\angle A + \angle B = \angle C = 90^\circ;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (теорема Піфагора);}$$

$$R = m_c = \frac{c}{2}; \quad S = \frac{ab}{2};$$

$$a = c \sin A; \quad a = c \cos B;$$

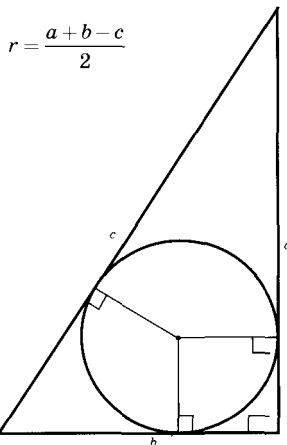
$$a = b \operatorname{tg} A; \quad a = b \operatorname{ctg} B.$$



$$h_c^2 = c_a \cdot c_b;$$

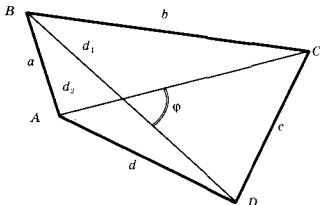
$$a^2 = c \cdot c_a;$$

$$b^2 = c \cdot c_b;$$



$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

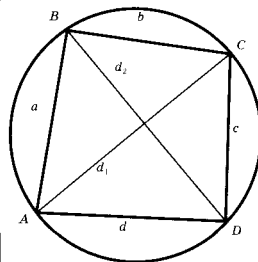
Чотирикутник



$$P = a + b + c + d; \quad p = \frac{a + b + c + d}{2};$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ; \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

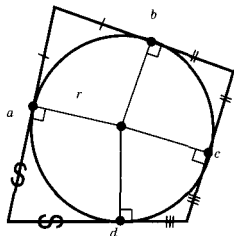
Вписаний чотирикутник



$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= \\ &= \angle B + \angle D = 180^\circ; \\ d_1 d_2 &= ac + bd \\ & \text{(теорема Птолемея)} \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};$$

Описаний чотирикутник



$$a + c = b + d;$$

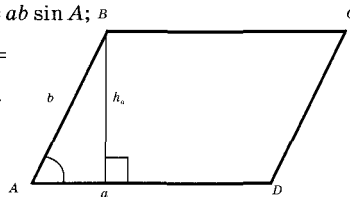
$$S = pr$$

Паралелограм

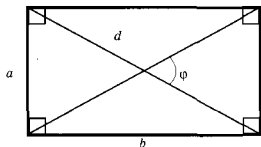
$$P = 2(a + b); \quad \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ;$$

$$S = ah_a; \quad S = ab \sin A; \quad B$$

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= \\ &= 2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$



Прямокутник



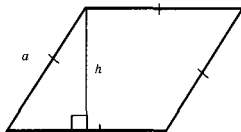
$$P = 2(a + b); \quad S = ab;$$

$$R = \frac{d}{2};$$

$$d^2 = a^2 + b^2;$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

Ромб

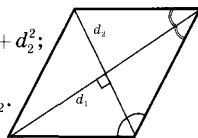


$$d_1 \perp d_2;$$

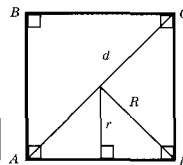
$$S = ah;$$

$$4a^2 = d_1^2 + d_2^2;$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$



Квадрат



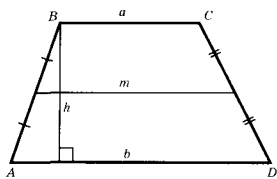
$$P = 4a;$$

$$\begin{aligned} \angle A = \angle B &= \\ = \angle C = \angle D &= \\ = 90^\circ; \end{aligned}$$

$$d = a\sqrt{2}; \quad S = a^2 = \frac{1}{2} d^2;$$

$$r = \frac{a}{2}; \quad R = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Трапеція



$$\begin{aligned}\angle A + \angle B &= \\ &= \angle C + \angle D = 180^\circ;\end{aligned}$$

$$m = \frac{a+b}{2};$$

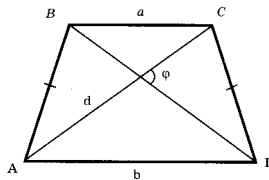
$$S = \frac{a+b}{2}h = mh.$$

Рівнобічна трапеція

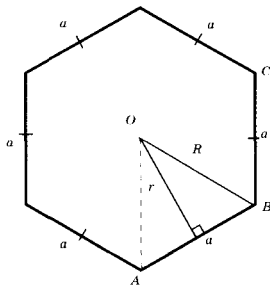
$$\angle A = \angle D;$$

$$\angle B = \angle C;$$

$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi.$$



Правильний шестикутник



$$P = 6a; R = a;$$

$$\angle AOB = 60^\circ;$$

$$\angle ABC = 120^\circ;$$

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2};$$

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

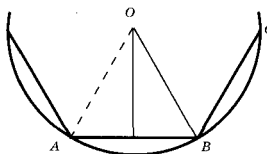
Правильні многокутники

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n};$$

$$\angle ABC = \frac{n-2}{n}180^\circ;$$

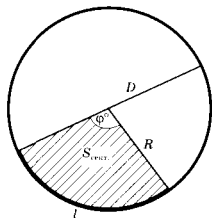
$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}};$$



$$S = n \frac{R^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Коло, круг



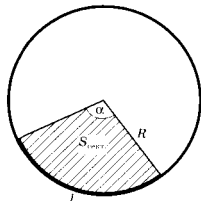
$$C = 2\pi R = \pi D;$$

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4};$$

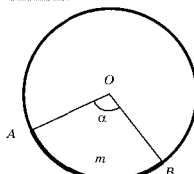
$$l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R \varphi}{180} = R \alpha;$$

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360} = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

φ — в градусах
 α — в радіанах

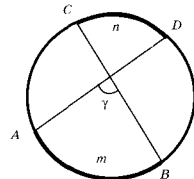
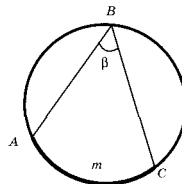


Кути та коло



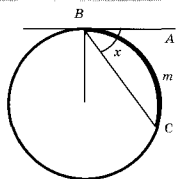
$$\angle \alpha = \cup AmB$$

$$\angle \beta = \frac{\cup AmC}{2}$$



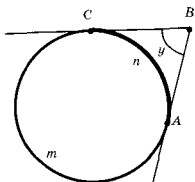
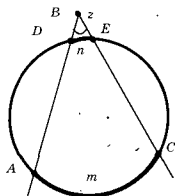
$$\angle \gamma = \frac{1}{2} (\cup AmB + \cup CnD)$$

Кути та коло



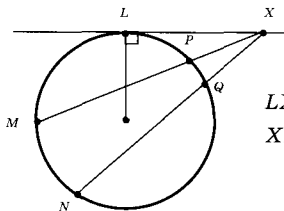
$$\angle x = \frac{1}{2} \cup BmC$$

$$\angle z = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup DnE)$$



$$\angle y = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC)$$

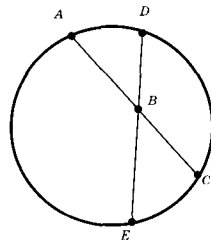
Пропорційні відрізки в колі



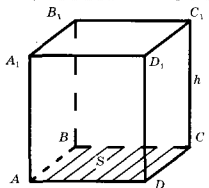
$$LX^2 = XM \cdot XP;$$

$$XM \cdot XP = XN \cdot XQ.$$

$$AB \cdot BC = BE \cdot BD;$$



Прямий паралелепіпед



$$AC_1^2 + A_1C^2 + DB_1^2 + D_1B^2 =$$

$$= 4(AA_1^2 + AB^2 + AD^2);$$

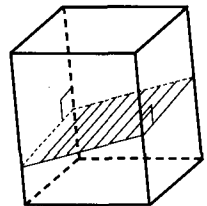
$$S_{\text{біч.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h;$$

$$V = S \cdot h.$$

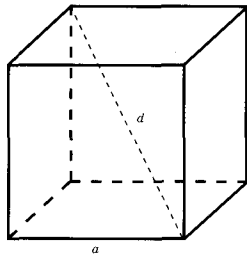
Похилий паралелепіпед

$$S_{\text{біч.}} = P_{\text{перп. пер.}} \cdot l;$$

$$V = S_{\text{перп. пер.}} \cdot l.$$



Куб



$$d^2 = 3a^2;$$

$$S_{\text{повн.}} = 6a^2;$$

$$V = a^3.$$

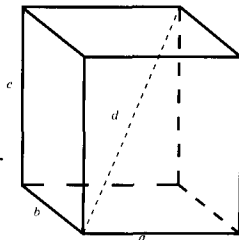
Прямокутний паралелепіпед

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

$$S_{\text{біч.}} = 2(a + b) \cdot c;$$

$$V = abc;$$

$$S_{\text{повн.}} = 2(ab + ac + bc).$$



Призма

$$S_{\text{біч.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h;$$

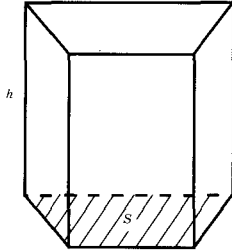
$$S_{\text{біч.}} = P_{\text{перп. пер.}} \cdot l;$$

$$V = Sh;$$

$$V = S_{\text{перп. пер.}} \cdot l;$$

$$S_{\text{біч.}} = anh,$$

(для правильної).



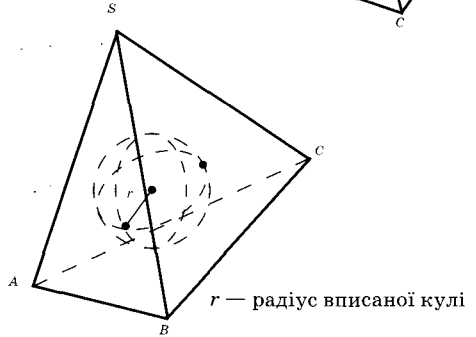
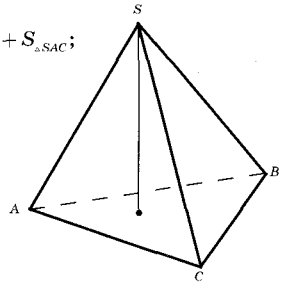
Піраміда

$$S_{\text{біч.}} = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SAC};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h;$$

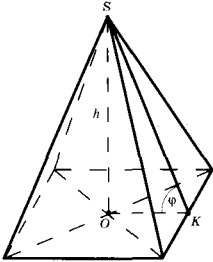
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{повн.}} \cdot r;$$

$$S_{\text{повн.}} = S_{\text{біч.}} + S_{\text{осн.}}$$



r — радіус вписаної кулі

Правильна піраміда



$$S_{\text{біч.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot SK;$$

$$S_{\text{осн.}} = S_{\text{біч.}} \cdot \cos \varphi.$$

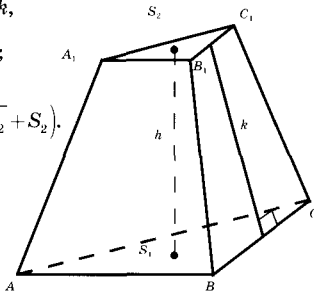
Зрізана піраміда

$$S_{\text{біч.}} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1A_1A};$$

$$S_{\text{біч.}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) k,$$

(для правильної);

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$



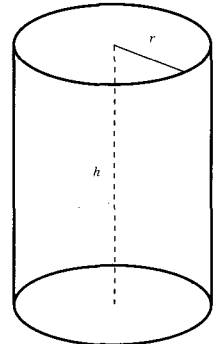
Циліндр

$$S_{\text{біч.}} = 2\pi rh;$$

$$V = \pi r^2 h;$$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h;$$

$$S_{\text{повн.}} = 2\pi r(r + h).$$



Конус

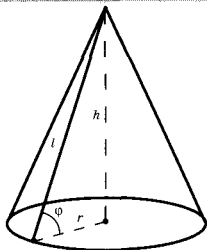
$$S_{\text{біч.}} = \pi r l;$$

$$S_{\text{осн.}} = \pi r^2;$$

$$S_{\text{повн.}} = \pi r(r + l);$$

$$S_{\text{осн.}} = S_{\text{біч.}} \cdot \cos \varphi;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h;$$



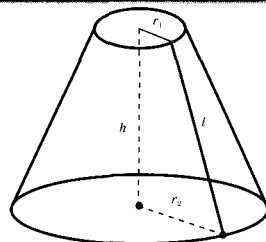
Зрізаний конус

$$S_{\text{біч.}} = \pi l(r_1 + r_2);$$

$$S_{\text{повн.}} = \pi l(r_1 + r_2) +$$

$$+ \pi(r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$



Куля, сфера

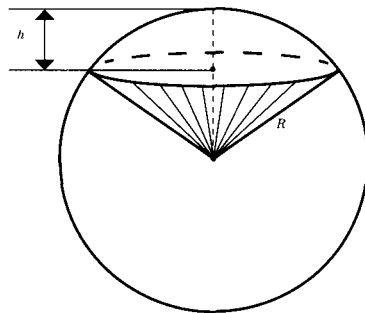
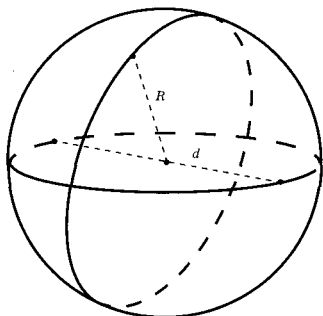
$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2;$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi d^3;$$

$$S_{\text{сегм.}} = 2\pi R h;$$

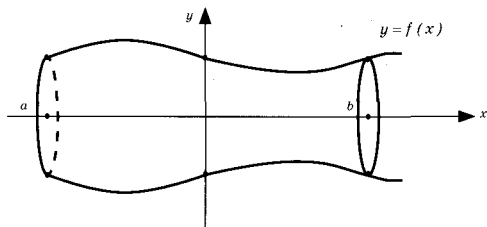
$$V_{\text{сегм.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right);$$

$$V_{\text{сект.}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$



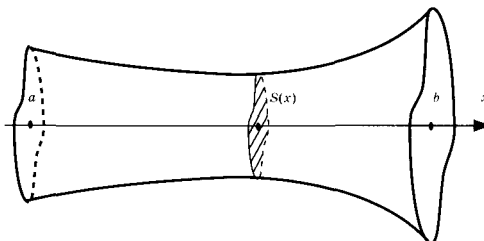
Об'єм тіла обертання

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Об'єм довільного тіла

$$V = \int_a^b S(x) dx$$



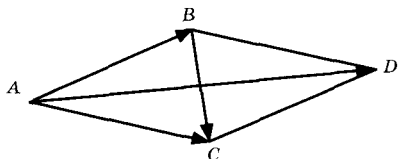
Рівняння площини

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Рівняння сфери

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Вектори

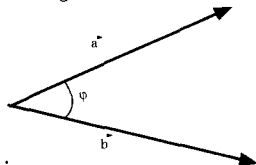


$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD};$$

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC};$$

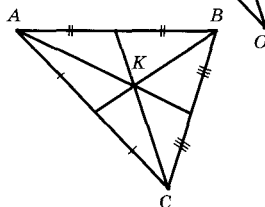
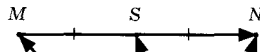
$$\overline{OS} = \frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{ON});$$

$$\overline{OK} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC});$$

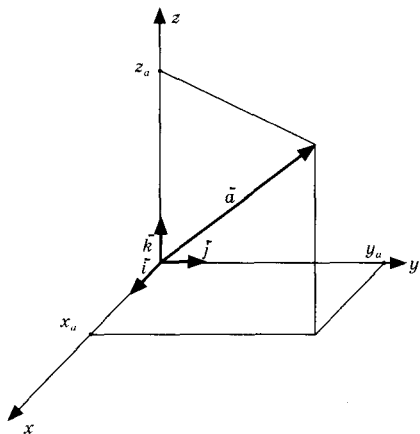


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi;$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \quad |\vec{a}|^2 = a^2.$$



Координати вектора



$$\vec{a}(x_a; y_a; z_a) = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k};$$

Якщо $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2};$$

Якщо $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$