Міні–підручник

# ТРИГОНОМЕТРІЯ

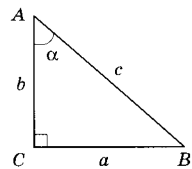
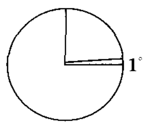
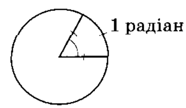
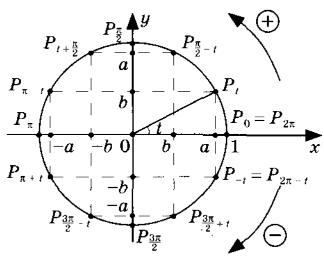
**Замовляйте безкоштовний каталог видань поштою:**
а/с "Книжкова ліга", м. Харків, 61057
тел. (057) 719 98 80
**www.torsing.com.ua**
**З питань оптових поставок звертайтесь за**
тел. (057) 717 10 26
тел./факс (057) 719 98 73



ISBN 9789664045152

## Зміст

1. Градусна та радіанна міри кутів.
2. Означення тригонометричних функцій
3. Вираження одних тригонометричних функцій через інші.
4. Обернені тригонометричні функції.

| | |
|---|---|
| **Означення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника** | $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{протилежний катет}}$.  |
| **Градусна та радіанна міри кутів** |  $\pi$ радіан $= 180^\circ$; $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}02$ радіана;  1 радіан — центральний кут, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу; $1^\circ = \frac{1}{90}$ прямого кута; 1 радіан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$ |
| **Таблиця відповідності градусної та радіанної мір кутів** | (див. таблицю нижче) |
| **Точки одиничного кола** |  $P_t(a;b)$; $P_{\frac{\pi}{2}-t}(b;a)$; $P_{t+\frac{\pi}{2}}(-b;a)$; $P_{\pi-t}(-a;b)$; $P_{\pi+t}(-a;-b)$; $P_{\frac{3\pi}{2}-t}(-b;-a)$; $P_{\frac{3\pi}{2}+t}(b;-a)$; $P_{-t}(a;-b)$ |



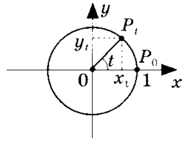




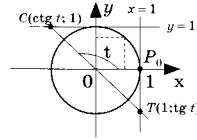
**Таблиця відповідності градусної та радіанної мір кутів**

| Градусна міра | 0° | 15° | 30° | 45° | 60° | 75° | 90° | 105° | 120° | 135° | 150° | 165° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Радіанна міра | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{12}$ | $\pi$ |

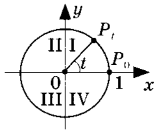
**Означення тригонометричних функцій довільного числа**




$\sin t = y_t$;
$\cos t = x_t$;
$\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$;
$\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$




**Знаки тригонометричних функцій по чвертях**

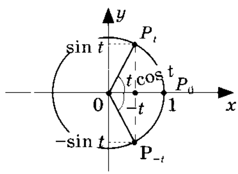



| Знаки \ Чверті | I $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ | II $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$ | III $\left(\pi+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ | IV $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k; 2\pi+2\pi k\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| sin *t* | + | + | − | − |
| cos *t* | + | − | − | + |
| tg *t*, ctg *t* | + | − | + | − |

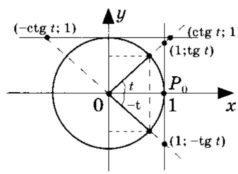
**Значення тригонометричних функцій деяких кутів**

| Значення \ Кут | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
| sin *t* | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| cos *t* | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| tg *t* | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | не визн. | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ | не визн. | $0$ |
| ctg *t* | не визн. | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | не визн. | $0$ | не визн. |

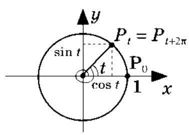
**Парність (непарність) тригонометричних функцій**



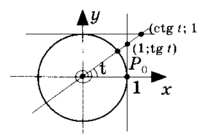

Непарні:
$\sin(-t) = -\sin t$,
$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$,
$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$
Парна:
$\cos(-t) = \cos t$




**Періодичність тригонометричних функцій**




$\sin(t+2\pi) = \sin t$,
$\cos(t+2\pi) = \cos t$,
$\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t$,
$\operatorname{ctg}(t+\pi) = \operatorname{ctg} t$




**Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того ж аргумента**

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$; $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$;

$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t}$

**Вираження одних тригонометричних функцій через інші**

| Функція | $\sin t$ | $\cos t$ | $\operatorname{tg} t$ | $\operatorname{ctg} t$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin t$ | $\sin t$ | $\pm\sqrt{1-\cos^2 t}$ | $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}$ |
| $\cos t$ | $\pm\sqrt{1-\sin^2 t}$ | $\cos t$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ | $\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}$ |
| $\operatorname{tg} t$ | $\dfrac{\sin t}{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$ | $\operatorname{tg} t$ | $\dfrac{1}{\operatorname{ctg} t}$ |
| $\operatorname{ctg} t$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$ | $\dfrac{\cos t}{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}$ | $\dfrac{1}{\operatorname{tg} t}$ | $\operatorname{ctg} t$ |

**Формули додавання**

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\mp1}{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}$$

**Формули подвійного аргументу**

$$\sin 2t=2\sin t\cos t;\quad \cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t;$$
$$\operatorname{tg} 2t=\frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t};\quad \operatorname{ctg} 2t=\frac{1-\operatorname{tg}^2 t}{2\operatorname{tg} t}$$

**Формули потрійного аргументу**

$$\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t;\quad \cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t;$$
$$tg\ 3t=\frac{3\operatorname{tg} t-\operatorname{tg}^3 t}{1-3\operatorname{tg}^2 t};\quad ctg\ 3t=\frac{\operatorname{ctg}^3 t-3\operatorname{ctg} t}{3\operatorname{ctg}^2 t-1}$$

**Формули зведення**

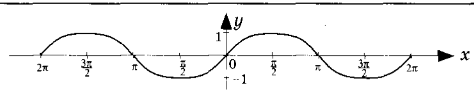
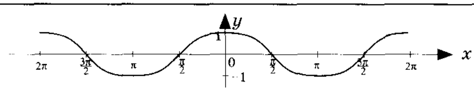
| Аргумент / Функція | Назва функції не змінюється | | | Назва функції змінюється | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-t$ | $\pi-t$ | $\pi+t$ | $\dfrac{\pi}{2}-t$ | $\dfrac{\pi}{2}+t$ | $\dfrac{3\pi}{2}-t$ | $\dfrac{3\pi}{2}+t$ |
| sin | $-\sin t$ | $\sin t$ | $-\sin t$ | $\cos t$ | $\cos t$ | $-\cos t$ | $-\cos t$ |
| cos | $\cos t$ | $-\cos t$ | $-\cos t$ | $\sin t$ | $-\sin t$ | $-\sin t$ | $\sin t$ |
| tg | $-\operatorname{tg} t$ | $-\operatorname{tg} t$ | $\operatorname{tg} t$ | $\operatorname{ctg} t$ | $-\operatorname{ctg} t$ | $\operatorname{ctg} t$ | $-\operatorname{ctg} t$ |
| ctg | $-\operatorname{ctg} t$ | $-\operatorname{ctg} t$ | $\operatorname{ctg} t$ | $\operatorname{tg} t$ | $-\operatorname{tg} t$ | $\operatorname{tg} t$ | $-\operatorname{tg} t$ |

**Формули пониження степеня**

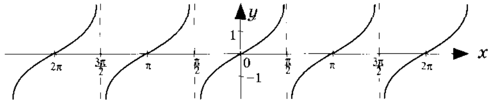
$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2};\quad \cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2};\quad (\sin t+\cos t)^2=1+\sin 2t;$$
$$1+\cos 2t=2\cos^2 t;\quad 1-\cos 2t=2\sin^2 t;$$
$$\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$$

**Формули половинного кута**

$$\sin\frac{t}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}};\quad \cos\frac{t}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}};$$
$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{1+\cos t}{\sin t}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}$$

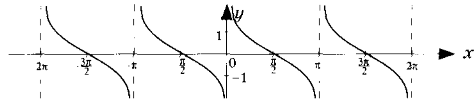
| | |
|---|---|
| **Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного кута (універсальна підстановка)** | $\sin t=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$; $\cos t=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$; $\operatorname{tg} t=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$; $\operatorname{ctg} t=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}$ |
| **Формули перетворення добутку на суму** | $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$; $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$;<br>$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$;<br>$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$;<br>$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$;<br>$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$ |
| **Формули перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій в добуток** | $\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$; $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;<br>$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;<br>$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\pm\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ |
| **Формула додаткового кута** | $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$,<br>де $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2+b^2\neq 0$<br>$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;<br>$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ |
| **Функція y = sin x, її графік (синусоїда) і властивості** | <br>Область визначення — $R$. Область значень — [−1; 1]. Функція непарна $\sin(-x)=-\sin x$, періодична: $\sin(x+2\pi)=\sin x$. Функція зростає при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; спадає при $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ |
| **Функція y = cos x, її графік (косинусоїда) і властивості** | <br>Область визначення — $R$. Область значень — [−1; 1]. Функція парна $\cos(-x)=\cos x$, періодична: $\cos(x+2\pi)=\cos x$. Функція зростає при $x\in[-\pi+2\pi n;2\pi n]$, $n\in Z$; спадає при $x\in[2\pi n;\pi+2\pi n]$, $n\in Z$ |

**Функція y = tg x, її графік (тангенсоїда) і властивості**




Область визначення — $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Область значень — $R$. Функція непарна $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, періодична $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. Функція зростає при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$

**Функція y = ctg x, її графік (котангенсоїда) і властивості**




Область визначення: $x \neq \pi n$, $n \in Z$. Область значень − $R$. Функція непарна $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, періодична $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$. Функція спадає при $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$.

**Обернені тригонометричні функції**

$\arcsin a = t$ означає $\sin t = a$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, $|a| \le 1$.

$\arccos a = t$ означає $\cos t = a$, $0 \le t \le \pi$, $|a| \le 1$.

$\operatorname{arctg} a = t$ означає $\operatorname{tg} t = a$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $a \in R$.

$\operatorname{arcctg} a = t$ означає $\operatorname{ctg} t = a$, $0 < t < \pi$, $a \in R$.

**Значення обернених тригонометричних функцій деяких чисел**

| $a$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin a$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\arccos a$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 |

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$

| $a$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{arctg} a$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| $\operatorname{arcctg} a$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

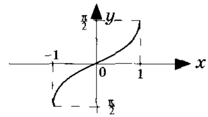
$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2}$

**Таблиця значень тригонометричних функцій від значень обернених тригонометричних функцій**

| Значення \ $\alpha$ | $\arcsin x$<br>$-1 \le x \le 1$ | $\arccos x$<br>$-1 \le x \le 1$ | $\operatorname{arctg} x$<br>$x \in R$ | $\operatorname{arcctg} x$<br>$x \in R$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin \alpha$ | $x$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\cos \alpha$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ |

| α / Значення | arcsin $x$, $-1 \le x \le 1$ | arccos $x$, $-1 \le x \le 1$ | arctg $x$, $x \in R$ | arcctg $x$, $x \in R$ |
|---|---|---|---|---|
| tg α | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert \ne 1$ | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \ne 0$ | $x$ | $\frac{1}{x}, x \ne 0$ |
| ctg α | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \ne 0$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert \ne 1$ | $\frac{1}{x}, x \ne 0$ | $x$ |

**Функція $y = \arcsin x$, її графік і властивості**



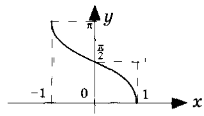

Область визначення — [−1; 1].

Область значень — $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція непарна: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Функція зростаюча.

**Функція $y = \arccos x$, її графік і властивості**



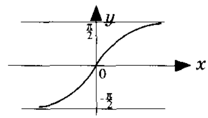

Область визначення — [−1; 1].

Область значень — [0; π].

Функція ні парна, ні непарна.

Функція спадна.

**Функція $y = \operatorname{arctg} x$, її графік і властивості**



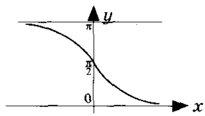

Область визначення — $R$.

Область значень — $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція непарна: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Функція зростаюча.

**Функція $y = \operatorname{arcctg} x$, її графік і властивості**



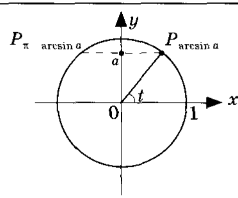

Область визначення — $R$.

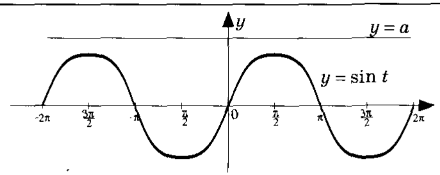
Область значень — (0; π).

Функція ні парна, ні непарна.

Функція спадна.

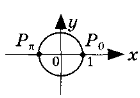
**Рівняння $\sin t = a$**



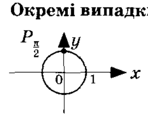




Якщо $|a| > 1$, розв'язків немає.
Якщо $|a| \le 1$, то $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.

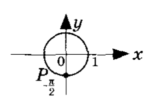
**Окремі випадки:**




$\sin t = 0$
$t = \pi n, n \in Z$

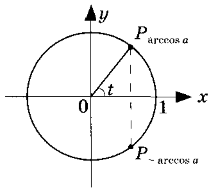


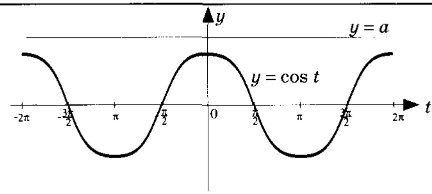

$\sin t = 1$
$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$




$\sin t = -1$
$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

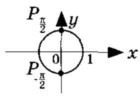
**Рівняння $\cos t = a$**



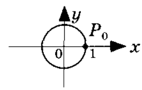

Якщо $|a| > 1$, розв'язків немає.
Якщо $|a| \le 1$, то $t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$.

**Окремі випадки:**



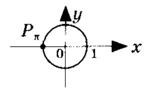

$\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$




$\cos t = 1$

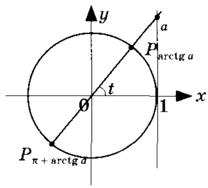
$t = 2\pi n,\ n \in Z$

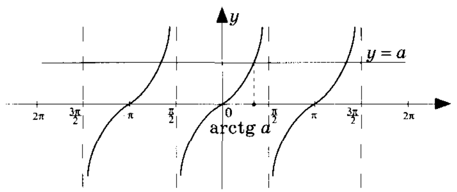



$\cos t = -1$

$t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

**Рівняння $\operatorname{tg} t = a$**



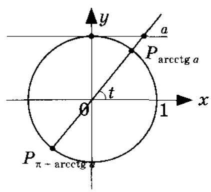



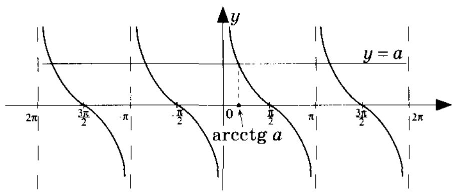

$t = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$

**Окремий випадок:**

$\operatorname{tg} t = 0,\ t = \pi n,\ n \in Z$

**Рівняння $\operatorname{ctg} t = a$**



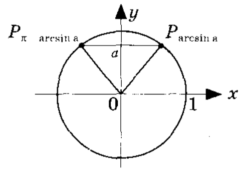

$t = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

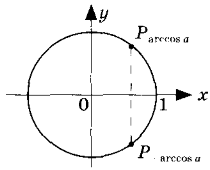
**Окремий випадок:**

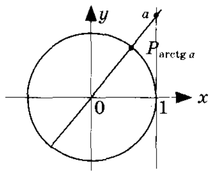
$\operatorname{ctg} t = 0,\ t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

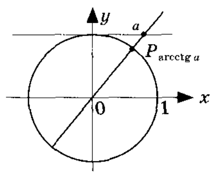
**Рівняння з оберненими тригонометричними функціями**

| $\arcsin t = a$ | $\arccos t = a$ | $\operatorname{arctg} t = a$ | $\operatorname{arcctg} t = a$ |
|---|---|---|---|
| $-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}$<br>$t = \sin a$ | $0 \le a \le \pi$<br>$t = \cos a$ | $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$<br>$t = \operatorname{tg} a$ | $0 < a < \pi$<br>$t = \operatorname{ctg} a$ |
| $\lvert a\rvert > \frac{\pi}{2}$<br>розв'язків немає | $a < 0$ або $a > \pi$<br>розв'язків немає | $\lvert a\rvert \ge \frac{\pi}{2}$<br>розв'язків немає | $a \le 0$ або $a \ge \pi$<br>розв'язків немає |

<table>
<tr>
<td>Нерівності<br>sin t ≤ a,<br>sin t ≥ a</td>
<td>



$\sin t \le a$<br>
Якщо $|a| \le 1$, то $-\arcsin a + \pi(2n-1) \le t \le \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$. Якщо $a \ge 1$, то $t \in R$. Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.<br>
$\sin t \ge a$<br>
Якщо $|a| \le 1$, то $\arcsin a + 2\pi n \le t \le -\arcsin a + (2n+1)\pi$, $n \in Z$. Якщо $a > 1$, то розв'язків немає. Якщо $a \le -1$, то $t \in R$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Нерівності<br>cos t ≤ a,<br>cos t ≥ a</td>
<td>



$\cos t \le a$<br>
Якщо $a \ge t$, то $t \in R$.<br>
Якщо $|a| \le 1$, то $\arccos a + 2\pi n \le t \le -\arccos a + 2\pi(n+1)$, $n \in Z$.<br>
Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.<br>
$\cos t \ge a$<br>
Якщо $|a| \le 1$, то $-\arccos a + 2\pi n \le t \le \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.<br>
Якщо $a > 1$, то розв'язків немає.<br>
Якщо $a \le -1$, то $t \in R$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Нерівності<br>tg t ≤ a,<br>tg t ≥ a</td>
<td>



$\operatorname{tg} t \le a$<br>
$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \le \operatorname{arctg} a + \pi n$ , $n \in Z$.<br>
$\operatorname{tg} t \ge a$<br>
$\operatorname{arctg} a + \pi n \le t < \frac{\pi}{2} + \pi n$ , $n \in Z$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Нерівності<br>ctg t ≤ a,<br>ctg t ≥ a</td>
<td>



$\operatorname{ctg} t \le a$<br>
$\operatorname{arcctg} a + \pi n \le t < \pi(n+1)$, $n \in Z$.<br>
$\operatorname{ctg} t \ge a$<br>
$\pi n < t \le \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Нерівності<br>arcsin t ≥ a,<br>arcsin t ≤ a</td>
<td>
<table>
<tr><th>$a$</th><th>$\arcsin t \ge a$</th><th>$\arcsin t \le a$</th></tr>
<tr><td>$|a| < -\frac{\pi}{2}$</td><td>$t \in [-1; 1]$</td><td>немає розв'язків</td></tr>
<tr><td>$a = -\frac{\pi}{2}$</td><td>$t \in [-1; 1]$</td><td>$t = -1$</td></tr>
<tr><td>$|a| < \frac{\pi}{2}$</td><td>$t \in [\sin a; 1]$</td><td>$t \in [-1; \sin a]$</td></tr>
<tr><td>$a = \frac{\pi}{2}$</td><td>$t = 1$</td><td>$t \in [-1; 1]$</td></tr>
<tr><td>$a > \frac{\pi}{2}$</td><td>немає розв'язків</td><td>$t \in [-1; 1]$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>